

平成9年度 熊本大学2次試験前期日程(数学問題)120分
文系(教育学部)平成9年2月25日

新課程履修者は **1** ~ **3** から1題選択, **5** ~ **7** から1題選択.

旧課程履修者は **1** ~ **4** から1題選択, **5** ~ **8** から1題選択.

9 ~ **11** 必答.

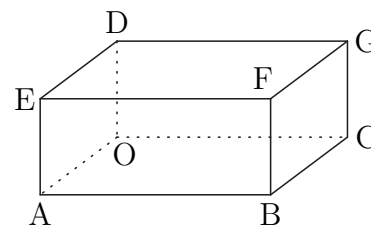
- 1** ある整式 A を $x^2 + 1$ で割ると余りが $x + 1$ で, $x + 1$ で割ると余りが 1 である。整式 A を $(x^2 + 1)(x + 1)$ で割ったときの余りを求めよ。
- 2** 1辺の長さが 1 の正五角形において, 5 本の対角線を引いたときにできる小さな正五角形の1辺の長さを求めよ。
- 3** $a_1 = 1, b_1 = 1, b_{n+1} = 3b_n + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) をみたす2つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ があり, $c_n = a_n + b_n + 1$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおくと $\{c_n\}$ は公比 3 の等比数列になる。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) a_n を n の式で表せ。

(2) b_n を n の式で表せ。

- 4** (新課程履修者はこの問題を選択できない。)

右の図のような $OA = p, OC = q, OD = r$ である直方体 $OABC-DEFG$ において, 平面 ADC と平面 DFC のなす角を θ とするとき, $\cos \theta$ の値を求めよ。



- 5** 相異なる3点 O, A, B に対して $\angle AOB = 120^\circ$ とする。 $\vec{a} = \vec{OA}, \vec{b} = \vec{OB}$ とおき $\vec{OP} = \frac{2|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + 2|\vec{b}|}$ とおくと $\angle AOP$ を求めよ。

- 6** p, q, r は実数で, $p^2 + q^2 \neq 0$ とする。 x の方程式

$$x^3 + (2p - 1)x^2 + (p^2 + q^2 - 2p)x - p^2 - q^2 = 0$$

の3つの解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ に対して, $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \frac{1}{\alpha_3}$ を解とする方程式が

$$rx^3 - 33x^2 + 9x - 1 = 0$$

となるとき, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の値を求めよ。

7 袋 A には白玉が m 個と黒玉が 1 個入っており，袋 B には白玉が 1 個と黒玉が m 個入っている。ただし， $m \geq 1$ とする。それぞれの袋から無作為に玉を 1 個ずつ取り出し，2 個とも白玉なら 2 個とも袋 A に入れ，2 個とも黒玉なら 2 個とも袋 B に入れ，白玉と黒玉が出たときは，白玉は黒玉が出た袋に，黒玉は白玉が出た袋に入れる，という試行を考える。試行後の袋 A の中の白玉の個数の確率分布およびその期待値を求めよ。

8 (新課程履修者はこの問題を選択できない。)

xy 平面において，原点を中心として 60° 回転し，さらに y 軸に関して対称な点に移す 1 次変換を f とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) f を表す行列を求めよ。

(2) 点 (x, y) が f によって自分自身に移されるとき， x, y の関係式を求めよ。

9 1 辺の長さが 12cm の正三角形 ABC がある。点 P は点 A から，点 Q は点 B から，点 R は点 C から同時に出発し，それぞれ ABC の辺に沿って左まわり (反時計まわり) に動く。点 P は毎秒 2cm，点 Q は毎秒 3cm，点 R は毎秒 4cm の一定の速さで動くとき，出発から t 秒後の三角形 PQR の面積 $S(t)$ の $0 \leq t \leq 3$ における最小値と，そのときの t の値を求めよ。

10 x の 2 次方程式

$$x^2 + 2(a + \sin^2 \theta)x + 2a + 3 + \cos 2\theta = 0$$

が $-60^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ の範囲のすべての θ に対して実数解をもつとする。このとき， a の値の範囲を求めよ。

11 次の問いに答えよ。

(1) $x > 0$ のとき $x + \frac{1}{x} \geq 2$ を示せ。

(2) $f(x) = x^3 - 3x$ ， $g(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x$ ($a > 0$) とする。2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた面積を S とするとき， $\frac{S}{a}$ を最小にする a の値およびその最小値を求めよ。

解答例

- 1 整式 A を $A(x)$ とおく. $A(x)$ を 3 次式 $(x^2 + 1)(x + 1)$ で割ったときの商 $Q(x)$, 余りを $ax^2 + bx + c$ とおくと

$$\begin{aligned} A(x) &= (x^2 + 1)(x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c \\ &= (x^2 + 1)\{(x + 1)Q(x) + a\} + bx + c - a \end{aligned}$$

$A(x)$ を $x^2 + 1$ で割った余りが $x + 1$ であるから

$$b = 1, \quad c - a = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$A(x)$ を $x + 1$ で割った余りが 1 であるから, 剰余の定理により

$$A(-1) = a - b + c = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3}{2}$ よって, 求める余りは $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

別解 $A(x)$ を 3 次式 $(x^2 + 1)(x + 1)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $ax^2 + bx + c$ とおくと

$$A(x) = (x^2 + 1)(x + 1)Q(x) + ax^2 + bx + c$$

$A(x)$ を $x^2 + 1$ で割った余りが $x + 1$ であるから, $A(i) = 1 + i$ より

$$-a + c + bi = 1 + i \quad \text{ゆえに} \quad -a + c = 1, \quad b = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

$A(x)$ を $x + 1$ で割った余りが 1 であるから, 剰余の定理により

$$A(-1) = a - b + c = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて $a = \frac{1}{2}, b = 1, c = \frac{3}{2}$ よって, 求める余りは $\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

- 2 正五角形は円に内接するから, 右の図において

$$\angle BAC = 36^\circ, \quad \angle ABC = \angle ACB = 72^\circ$$

$$\angle CBD = 36^\circ, \quad \angle BCD = \angle BDC = 72^\circ$$

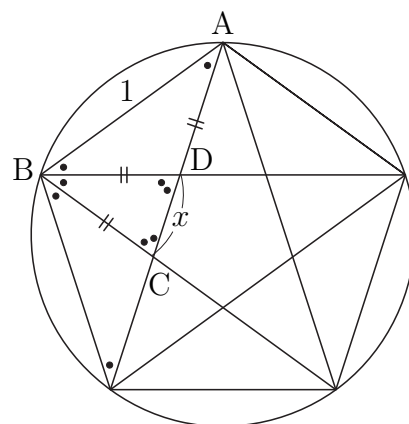
$x = CD$ とおくと

$$BC = BD = AD = 1 - x$$

$\triangle ABC \sim \triangle BCD$ であるから

$$1 : 1 - x = 1 - x : x \quad \text{ゆえに} \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

$0 < x < 1$ に注意してこれを解くと $x = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$



3 (1) $c_n = a_n + b_n + 1$ について, $\{c_n\}$ が公比 3 の等比数列であるから

$$a_{n+1} + b_{n+1} + 1 = 3(a_n + b_n + 1) \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} + b_{n+1} = 3a_n + 3b_n + 2$$

これと $b_{n+1} = 3b_n + a_n$ の辺々を引くと

$$a_{n+1} = 2a_n + 2 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2)$$

$\{a_n + 2\}$ は初項 $a_1 + 2 = 3$, 公比 2 の等比数列であるから

$$a_n + 2 = 3 \cdot 2^{n-1} \quad \text{よって} \quad a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$$

(2) $\{a_n + b_n + 1\}$ は初項 $a_1 + b_1 + 1 = 3$, 公比 3 の等比数列であるから

$$a_n + b_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad b_n = 3^n - 1 - a_n$$

これに (1) の結果を代入すると

$$b_n = 3^n - 1 - (3 \cdot 2^{n-1} - 2) = 3^n - 3 \cdot 2^{n-1} + 1$$

4 右の図のように座標軸をとると

$$\vec{AC} = (-p, q, 0), \quad \vec{AD} = (-p, 0, r)$$

$$\vec{CD} = (0, -q, r), \quad \vec{CF} = (p, 0, r)$$

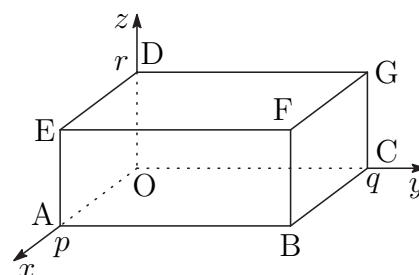
\vec{AC} と \vec{AD} に垂直なベクトルの 1 つを \vec{u} ,
 \vec{CD} と \vec{CF} に垂直なベクトルの 1 つを \vec{v}
 とすると

$$\vec{u} = (qr, pr, pq), \quad \vec{v} = (-qr, pr, pq)$$

\vec{u} と \vec{v} のなす角を α とすると

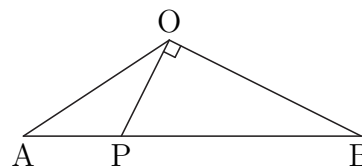
$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-q^2 r^2 + p^2 r^2 + p^2 q^2}{q^2 r^2 + p^2 r^2 + p^2 q^2}$$

$$\text{よって} \quad \cos \theta = |\cos \alpha| = \frac{|-q^2 r^2 + p^2 r^2 + p^2 q^2|}{q^2 r^2 + p^2 r^2 + p^2 q^2}$$



- 5 $\vec{OP} = \frac{2|\vec{b}|\vec{a} + |\vec{a}|\vec{b}}{|\vec{a}| + 2|\vec{b}|}$ より, P は AB を $|\vec{a}| : 2|\vec{b}|$ に内分する点である. $\angle AOB = 120^\circ$ より

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|$$



ゆえに $\vec{OB} \cdot \vec{OP} = \frac{2|\vec{b}|\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|\vec{b} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + 2|\vec{b}|} = 0$ したがって $\angle POB = 90^\circ$

よって $\angle AOP = \angle AOB - \angle POB = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

- 6 方程式 $rx^3 - 33x^2 + 9x - 1 = 0$ の解が $\frac{1}{\alpha_k}$ ($k = 1, 2, 3$) であるから

$$r \left(\frac{1}{\alpha_k} \right)^3 - 33 \left(\frac{1}{\alpha_k} \right)^2 + 9 \left(\frac{1}{\alpha_k} \right) - 1 = 0$$

ゆえに $\alpha_k^3 - 9\alpha_k^2 + 33\alpha_k - r = 0$

したがって, α_k ($k = 1, 2, 3,$) を解とする 3 次方程式 $x^3 - 9x^2 + 33x - r = 0$ が, 次の方程式に一致する.

$$x^3 + (2p - 1)x^2 + (p^2 + q^2 - 2p)x - p^2 - q^2 = 0$$

係数を比較すると

$$2p - 1 = -9, \quad p^2 + q^2 - 2p = 33, \quad -p^2 - q^2 = -r$$

上の 3 式から $p = -4, r = p^2 + q^2 = 25$

α_k ($k = 1, 2, 3,$) を解とする 3 次方程式は $x^3 - 9x^2 + 33x - 25 = 0$ であるから

$$(x - 1)(x^2 - 8x + 25) = 0$$

よって, α_k ($k = 1, 2, 3,$) は, これを解いて $1, 4 \pm 3i$

- 7 袋 A, B から取り出す玉の色の確率および試行後の袋 A 中の白玉の個数は, 次の表のようになる.

		$\frac{1}{m+1}$	$\frac{m}{m+1}$
	A \ B	白	黒
$\frac{m}{m+1}$	白	$\frac{m}{(m+1)^2}$	$\frac{m^2}{(m+1)^2}$
$\frac{1}{m+1}$	黒	$\frac{1}{(m+1)^2}$	$\frac{m}{(m+1)^2}$

確 率

	A \ B	白	黒
白		$m + 1$	$m - 1$
黒		$m + 1$	m

試行後の袋 A の
中の白玉の個数

したがって, 試行後の袋 A 中の白玉の個数の確率分布およびその期待値 $E(x)$ は次のようになる.

X	$m - 1$	m	$m + 1$	計
$P(X)$	$\frac{m^2}{(m+1)^2}$	$\frac{m}{(m+1)^2}$	$\frac{m+1}{(m+1)^2}$	1

$$\begin{aligned}
 E(X) &= (m-1) \cdot \frac{m^2}{(m+1)^2} + m \cdot \frac{m}{(m+1)^2} + (m+1) \cdot \frac{m+1}{(m+1)^2} \\
 &= \frac{m^3 + m^2 + 2m + 1}{(m+1)^2}
 \end{aligned}$$

- 8 (1) 原点を中心に 60° の回転移動を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix}$

y 軸に関する対称移動を表す行列は $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

よって, f の表す行列は

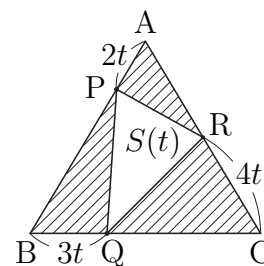
$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

- (2) (x, y) が f によって, 自分自身に移されるとき

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{ゆえに} \quad y = \sqrt{3}x$$

9 右の図から

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \triangle ABC - (\triangle APR + \triangle BQP + \triangle CRQ) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 12^2 \sin 60^\circ - \frac{1}{2} \cdot 2t(12 - 4t) \sin 60^\circ \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cdot 3t(12 - 2t) \sin 60^\circ \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cdot 4t(12 - 3t) \sin 60^\circ \\
 &= \frac{13\sqrt{3}}{2} t^2 - 27\sqrt{3}t + 36\sqrt{3} \\
 &= \frac{13\sqrt{3}}{2} \left(t - \frac{27}{13} \right)^2 + \frac{207\sqrt{3}}{26}
 \end{aligned}$$



$0 \leq t \leq 3$ であるから, $S(t)$ は $t = \frac{27}{13}$ で最小となる.

最小値は $S\left(\frac{27}{13}\right) = \frac{207\sqrt{3}}{26}$

10 $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$ であるから, 与えられた方程式は

$$x^2 + 2(a + \sin^2 \theta)x + 2a + 4 - 2\sin^2 \theta = 0$$

ここで, $t = \sin^2 \theta$ とおくと

$$x^2 + 2(a + t)x + 2a + 4 - 2t = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

①の判別式 D を $f(t) = D/4$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= (a + t)^2 - 1 \cdot (2a + 4 - 2t) \\ &= t^2 + 2(a + 1)t + a^2 - 2a - 4 \\ &= (t + a + 1)^2 - 4a - 5 \end{aligned}$$

$-60^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ より, $0 \leq t \leq \frac{3}{4}$ であるから, この範囲において, $f(t) \geq 0$ であればよい.

(i) $-a - 1 < 0$ すなわち $a > -1$ のとき, $f(0) \geq 0$ より

$$a^2 - 2a - 4 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leq 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5} \leq a$$

$$a > -1 \text{ に注意して} \quad 1 + \sqrt{5} \leq a$$

(ii) $0 \leq -a - 1 \leq \frac{3}{4}$ すなわち $-\frac{7}{4} \leq a \leq -1$ のとき, $f(-a - 1) \geq 0$ より

$$-4a - 5 \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leq -\frac{5}{4}$$

$$-\frac{7}{4} \leq a \leq -1 \text{ に注意して} \quad -\frac{7}{4} \leq a \leq -\frac{5}{4}$$

(iii) $\frac{3}{4} < -a - 1$ すなわち $a < -\frac{7}{4}$ のとき, $f\left(\frac{3}{4}\right) \geq 0$ より

$$a^2 - \frac{1}{2}a - \frac{31}{16} \geq 0 \quad \text{ゆえに} \quad a \leq \frac{1 - 4\sqrt{2}}{4}, \frac{1 + 4\sqrt{2}}{4} \leq a$$

$$a < -\frac{7}{4} \text{ に注意して} \quad a < -\frac{7}{4}$$

(i),(ii),(iii) より $a \leq -\frac{5}{4}, 1 + \sqrt{5} \leq a$

$$\boxed{11} \quad (1) \quad x > 0 \text{ のとき} \quad x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$$

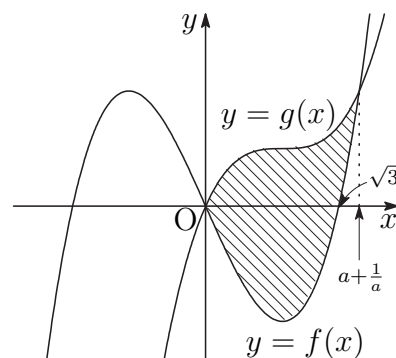
$$\text{よって} \quad x > 0 \text{ のとき} \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

等号が成立するのは, $x = 1$ のときに限る.

$$(2) \quad g(x) - f(x) = 3x - 3ax^2 + 3a^2x \\ = -3ax \left\{ x - \left(a + \frac{1}{a} \right) \right\}$$

$y = f(x)$ と $g(x)$ で囲まれた部分は右の図の斜線部分であるから

$$S = \int_0^{a+\frac{1}{a}} \{g(x) - f(x)\} dx \\ = -3a \int_0^{a+\frac{1}{a}} \left\{ x - \left(a + \frac{1}{a} \right) \right\} dx \\ = \frac{a}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)^3$$



$$(1) \text{ の結果から} \quad \frac{S}{a} = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)^3 \geq \frac{1}{2} \cdot 2^3 = 4$$

上式において, $a = 1$ のとき等号が成立する.

よって, $\frac{S}{a}$ は, $a = 1$ のとき, 最小値 4 をとる.