

令和 7 年度 熊本大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
 理学部 数 I, II, III, A, B, C(120 分) (理科 1 科目と合わせて)
 令和 7 年 3 月 12 日

問題 1 2 3

- 1 平面上の 3 つの点 A, B, C は, $|\overrightarrow{AB}| = 5$, $|\overrightarrow{AC}| = 3$ および $\angle BAC = 60^\circ$ を満たすとする。 $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ とおく。線分 AB 上の点 D は $\overrightarrow{AD} = \frac{7}{10}\vec{b}$ を満たし, 線分 AC 上の点 E は $\overrightarrow{AE} = k\vec{c}$ ($0 < k < 1$) を満たすとする。2 つの線分 BE と CD の交点を F とする。

- (1) $\overrightarrow{AF}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ および k を用いて表せ。
- (2) $|\overrightarrow{AF}| = |\overrightarrow{BF}|$ であるとき, k の値を求めよ。
- (3) k を (2) で求めた値とするとき, $\triangle ABF$ の面積を求めよ。

- 2 1 枚のコインを n 回投げ, 整数 $a_0, a_1, \dots, a_n$ を次のように定める。
 $a_0 = 0$ とし, $k = 1, 2, \dots, n$ のとき

$$a_k = \begin{cases} a_{k-1}^2 & (k \text{ 回目に表が出たとき}) \\ a_{k-1} + 2 & (k \text{ 回目に裏が出たとき}) \end{cases}$$

とする。コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とし, a_n を 3 で割った余りが, 0 となる確率を p_n , 1 となる確率を q_n , 2 となる確率を r_n とする。

- (1) p_1, p_2 を求めよ。
- (2) p_{n+1}, q_{n+1} および r_{n+1} を, p_n, q_n および r_n のうち必要なものを用いて表せ。
- (3) $m = 1, 2, \dots$ のとき, p_{2m+1}, q_{2m+1} および r_{2m+1} を m の式で表せ。

3 a を正の実数, n を a より大きい正の整数とする。 e は自然対数の底であり, $e > 1$ である。曲線 $y = x(a - x)e^{-x}$ を C とする。 C と x 軸とで囲まれた部分の面積を S_1 とし, C と x 軸, 直線 $x = a$ および直線 $x = n$ で囲まれた部分の面積を I_n とする。以下, 必要ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = 0$ を用いてよい。

- (1) S_1 を a の式で表せ。
- (2) I_n を a と n の式で表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ を S_2 とする。 S_2 を a の式で表せ。
- (4) (3) で求めた S_2 に対して $S_1 = S_2$ となるとき, a の値を求めよ。

解答例

1 (1) $\vec{AF} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ とおくと, $\vec{AC} = \frac{1}{k}\vec{AE}$, $\vec{AB} = \frac{10}{7}\vec{AD}$ より

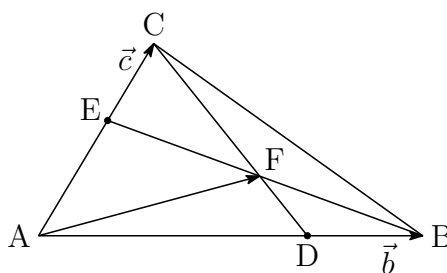
$$\vec{AF} = x\vec{AB} + \frac{y}{k}\vec{AE}, \quad \vec{AF} = \frac{10}{7}x\vec{AD} + y\vec{AC}$$

F は線分 BE および線分 CD 上の点であるから

$$x + \frac{y}{k} = 1, \quad \frac{10}{7}x + y = 1$$

上の 2 式から $x = \frac{7(1-k)}{10-7k}, \quad y = \frac{3k}{10-7k}$

よって $\vec{AF} = \frac{7(1-k)}{10-7k}\vec{b} + \frac{3k}{10-7k}\vec{c}$



(2) $|\vec{b}| = 5, \quad |\vec{c}| = 3, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cos 60^\circ = 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$

(1) の結果から $\vec{AF} = \frac{7(1-k)\vec{b} + 3k\vec{c}}{10-7k}, \quad \vec{BF} = \frac{-3\vec{b} + 3k\vec{c}}{10-7k}$

$|\vec{AF}| = |\vec{BF}|$ であるとき, 上の 2 式から

$$|7(1-k)\vec{b} + 3k\vec{c}|^2 = |-3\vec{b} + 3k\vec{c}|^2$$

$$49(1-k)^2|\vec{b}|^2 + 42k(1-k)\vec{b} \cdot \vec{c} + 9k^2|\vec{c}|^2 = 9|\vec{b}|^2 - 18k\vec{b} \cdot \vec{c} + 9k^2|\vec{c}|^2$$

$$1225(1-k)^2 + 315k(1-k) + 81k^2 = 225 - 135k + 81k^2$$

整理すると $91k^2 - 200k + 100 = 0$ ゆえに $(13k-10)(7k-10) = 0$

$0 < k < 1$ に注意して $k = \frac{10}{13}$

別解 $\vec{c} - \frac{(\vec{b} \cdot \vec{c})}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \vec{c} - \frac{3}{10} \vec{b}$ は, $\vec{b}$ と垂直であり, F は線分 AB の垂直二等分線上の点であるから, 実数 t を用いて

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \vec{b} + t \left(\vec{c} - \frac{3}{10} \vec{b} \right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{10} t \right) \vec{b} + t \vec{c}$$

$\vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立 (線形独立) であるから, (1) の結果と係数を比較して

$$\frac{7(1-k)}{10-7k} = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} t, \quad \frac{3k}{10-7k} = t$$

上の 2 式から t を消去すると

$$\frac{7(1-k)}{10-7k} = \frac{1}{2} - \frac{3}{10} \cdot \frac{3k}{10-7k} \quad \text{これを解いて} \quad k = \frac{10}{13}$$

(3) (2) の結果を (1) の結果に代入すると

$$\overrightarrow{AF} = \frac{7}{20} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}$$

$\frac{1}{2} \vec{c} = \overrightarrow{AG}$, $\frac{7}{20} \vec{b} = \overrightarrow{GF}$ とおくと, G は AC の中点で, $\overrightarrow{GF} \parallel \overrightarrow{AB}$ であるから

$$\begin{aligned} \triangle ABF &= \triangle ABG = \frac{1}{2} \triangle ABC \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{8} \sqrt{3} \end{aligned}$$

別解 $\vec{b}, \vec{c}$ を空間のベクトルとすると

$$\begin{aligned} \triangle ABF &= \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AF}| = \frac{1}{2} \left| \vec{b} \times \left(\frac{7}{20} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c} \right) \right| = \frac{1}{4} |\vec{b} \times \vec{c}| \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{|\vec{b}|^2 |\vec{c}|^2 - (\vec{b} \cdot \vec{c})^2} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{5^2 \cdot 3^2 - \left(\frac{15}{2} \right)^2} = \frac{15}{8} \sqrt{3} \end{aligned}$$



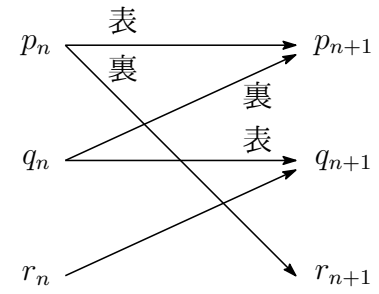
2 (1) 与えられた条件から

$$p_1 = \frac{1}{2}, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = \frac{1}{2},$$

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}q_n,$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + r_n,$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$$



漸化式から $p_2 = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}q_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{4}$

(2) (1) で示した漸化式より

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}q_n, \quad q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + r_n, \quad r_{n+1} = \frac{1}{2}p_n$$

(3) (2) の結果から

$$\begin{aligned} p_{n+2} &= \frac{1}{2}p_{n+1} + \frac{1}{2}q_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}q_n \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}q_n + r_n \right) \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n, \\ q_{n+2} &= \frac{1}{2}q_{n+1} + r_{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}q_n + r_n \right) + \frac{1}{2}p_n \\ &= \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n, \\ r_{n+2} &= \frac{1}{2}p_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}q_n \right) \\ &= \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n \end{aligned}$$

上の諸式において, $n = 2m - 1$ とおくと ($m = 1, 2, \dots$)

$$(*) \left\{ \begin{aligned} p_{2m+1} &= \frac{1}{4}p_{2m-1} + \frac{1}{2}q_{2m-1} + \frac{1}{2}r_{2m-1} \\ q_{2m+1} &= \frac{1}{2}p_{2m-1} + \frac{1}{4}q_{2m-1} + \frac{1}{2}r_{2m-1} \\ r_{2m+1} &= \frac{1}{4}p_{2m-1} + \frac{1}{4}q_{2m-1} \end{aligned} \right.$$

条件から，すべての自然数 m について

$$p_{2m-1} + q_{2m-1} + r_{2m-1} = 1 \quad (\text{A})$$

(*) の第 1 式と第 2 式の辺々の和と差をとると，上式に注意して

$$\begin{aligned} p_{2m+1} + q_{2m+1} &= \frac{3}{4}p_{2m-1} + \frac{3}{4}q_{2m-1} + r_{2m-1} \\ &= \frac{3}{4}p_{2m-1} + \frac{3}{4}q_{2m-1} + (1 - p_{2m-1} - q_{2m-1}) \\ &= -\frac{1}{4}(p_{2m-1} + q_{2m-1}) + 1 \end{aligned} \quad (\text{B})$$

$$p_{2m+1} - q_{2m+1} = -\frac{1}{4}(p_{2m-1} - q_{2m-1}) \quad (\text{C})$$

(B) より
$$p_{2m+1} + q_{2m+1} - \frac{4}{5} = -\frac{1}{4} \left(p_{2m-1} + q_{2m-1} - \frac{4}{5} \right)$$

$$p_{2m+1} + q_{2m+1} - \frac{4}{5} = \left(p_1 + q_1 - \frac{4}{5} \right) \left(-\frac{1}{4} \right)^m = -\frac{3}{10} \left(-\frac{1}{4} \right)^m$$

(C) より

$$p_{2m+1} - q_{2m+1} = (p_1 - q_1) \left(-\frac{1}{4} \right)^m = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4} \right)^m$$

上の 2 式から

$$p_{2m+1} = \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4} \right)^m + \frac{2}{5}, \quad q_{2m+1} = -\frac{2}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)^m + \frac{2}{5}$$

上の 2 式を $p_{2m+1} + q_{2m+1} + r_{2m+1} = 1$ に代入して整理すると

$$r_{2m+1} = \frac{3}{10} \left(-\frac{1}{4} \right)^m + \frac{1}{5}$$

補足 (2) の結論の第 1 式は

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}q_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

$r_n = 1 - (p_n + q_n)$ を (2) の結論の第 2 式に代入して整理すると

$$q_{n+1} = -p_n - \frac{1}{2}q_n + 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ② の特性方程式は

$$p = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q, \quad q = -p - \frac{1}{2}q + 1 \quad \text{これを解くと} \quad p = q = \frac{2}{5}$$

$$x_n = p_n - \frac{2}{5}, \quad y_n = q_n - \frac{2}{5} \quad \text{とおくと}$$

$$x_1 = \frac{1}{10}, \quad y_1 = -\frac{2}{5},$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}y_n,$$

$$y_{n+1} = -x_n - \frac{1}{2}y_n$$

$$x_1 = \frac{1}{2}x_0 + \frac{1}{2}y_0, \quad y_1 = -x_0 + \frac{1}{2}y_0 \quad \text{とすると} \quad x_0 = \frac{3}{5}, \quad y_0 = -\frac{2}{5}$$

k を定数とし, 上の 2 つの漸化式から

$$x_{n+1} + ky_{n+1} = \left(\frac{1}{2} - k\right)x_n + \frac{1}{2}(1-k)y_n$$

$$1 : k = \left(\frac{1}{2} - k\right) : \frac{1}{2}(1-k) \quad \text{とすると}$$

$$k \left(\frac{1}{2} - k\right) = 1 \cdot \frac{1}{2}(1-k) \quad \text{整理すると} \quad 2k^2 - 2k + 1 = 0$$

これを解くと, $k = \frac{1 \pm i}{2}$ であるから

$$x_{n+1} + \frac{1-i}{2}y_{n+1} = \frac{i}{2} \left(x_n + \frac{1-i}{2}y_n\right),$$

$$x_{n+1} + \frac{1+i}{2}y_{n+1} = -\frac{i}{2} \left(x_n + \frac{1+i}{2}y_n\right)$$

上の 2 式から

$$x_n + \frac{1-i}{2}y_n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \left(x_0 + \frac{1-i}{2}y_0\right) = \frac{2+i}{5} \left(\frac{i}{2}\right)^n \quad (\text{D})$$

$$x_n + \frac{1+i}{2}y_n = \left(-\frac{i}{2}\right)^n \left(x_0 + \frac{1+i}{2}y_0\right) = \frac{2-i}{5} \left(-\frac{i}{2}\right)^n \quad (\text{E})$$

(D) – (E) より

$$\begin{aligned} -iy_n &= \frac{2}{5 \cdot 2^n} \{i^n - (-i)^n\} + \frac{i}{5 \cdot 2^n} \{i^n + (-i)^n\} \\ y_n &= -\frac{1}{5 \cdot 2^n} \left(4 \sin \frac{n\pi}{2} + 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

(D) $\times \frac{1-i}{2}$ – (E) $\times \frac{1+i}{2}$ より

$$\begin{aligned} ix_n &= \frac{1-i}{2} \times \frac{2+i}{5} \left(\frac{i}{2} \right)^n - \frac{1+i}{2} \times \frac{2-i}{5} \left(-\frac{n}{2} \right)^n \\ &= \frac{1}{10 \cdot 2^n} \{i^n - (-i)^n\} + \frac{3i}{10 \cdot 2^n} \{i^n + (-i)^n\} \\ &= \frac{i}{5 \cdot 2^n} \left(\sin \frac{n\pi}{2} + 3 \cos \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

したがって $x_n = \frac{1}{5 \cdot 2^n} \left(\sin \frac{n\pi}{2} + 3 \cos \frac{n\pi}{2} \right)$

$p_n = x_n + \frac{2}{5}$, $q_n = y_n + \frac{2}{5}$, $r_n = 1 - (p_n + q_n)$ であるから

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{5 \cdot 2^n} \left(\sin \frac{n\pi}{2} + 3 \cos \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{2}{5} \\ q_n &= -\frac{1}{5 \cdot 2^n} \left(4 \sin \frac{n\pi}{2} + 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{2}{5} \\ r_n &= \frac{1}{5 \cdot 2^n} \left(3 \sin \frac{n\pi}{2} - \cos \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

を得る. とくに, $n = 2m + 1$ とすると ($m = 0, 1, 2, \dots$)

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \cos m\pi = (-1)^m, \quad \cos \frac{n\pi}{2} = 0$$

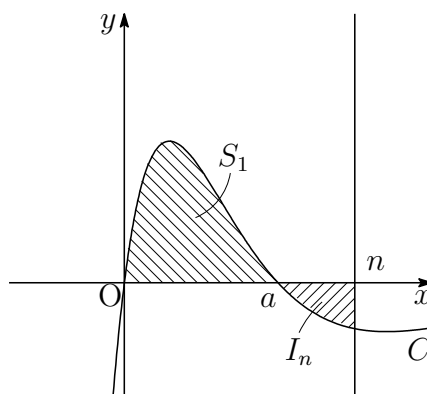
したがって

$$\begin{aligned} p_{2m+1} &= \frac{1}{5 \cdot 2^{2m+1}} \cdot (-1)^m + \frac{2}{5} = \frac{1}{10} \left(-\frac{1}{4} \right)^m + \frac{2}{5} \\ q_{2m+1} &= -\frac{1}{5 \cdot 2^{2m+1}} \cdot 4(-1)^m + \frac{2}{5} = -\frac{2}{5} \left(-\frac{1}{4} \right)^m + \frac{2}{5} \\ r_{2m+1} &= \frac{1}{5 \cdot 2^{2m+1}} \cdot 3(-1)^m + \frac{1}{5} = \frac{3}{10} \left(-\frac{1}{4} \right)^m + \frac{1}{5} \end{aligned}$$

■

3 (1) 求める面積 S_1 は

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \int_0^a x(a-x)e^{-x} dx \\
 &= \left[-\{(ax-x^2) + (ax-x^2)' + (ax-x^2)''\}e^{-x} \right]_0^a \\
 &= \left[\{x^2 + (2-a)x + (2-a)\}e^{-x} \right]_0^a \\
 &= (2+a)e^{-a} + a - 2
 \end{aligned}$$



(2) $a \leq x \leq n$ において, $y \leq 0$ であるから

$$\begin{aligned}
 I_n &= - \int_a^n x(a-x)e^{-x} dx \\
 &= \left[\{(ax-x^2) + (ax-x^2)' + (ax-x^2)''\}e^{-x} \right]_a^n \\
 &= \left[\{-x^2 + (a-2)x + (a-2)\}e^{-x} \right]_a^n \\
 &= \{-n^2 + (a-2)n + (a-2)\}e^{-n} + (2+a)e^{-a}
 \end{aligned}$$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{e^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = 0$ であるから, (2) の結果より

$$S_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = (2+a)e^{-a}$$

(4) (1), (3) の結果から, $S_1 = S_2$ となるとき

$$(2+a)e^{-a} + a - 2 = (2+a)e^{-a} \quad \text{よって} \quad a = 2$$

解説 $f(x)$ を何回でも微分可能な関数とし

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \dots \right\}$$

とおくと

$$\begin{aligned} \varphi'_k(x) &= \frac{1}{k} \left\{ f'(x) - \frac{f''(x)}{k} + \frac{f'''(x)}{k^2} - \dots \right\} \\ &= - \left\{ -\frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \dots \right\} \\ &= f(x) - \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \dots \right\} \\ &= f(x) - k\varphi_k(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よって } \{\varphi_k(x)e^{kx}\}' &= \varphi'_k(x)e^{kx} + k\varphi_k(x)e^{kx} \\ &= \{f(x) - k\varphi_k(x)\}e^{kx} + k\varphi_k(x)e^{kx} \\ &= f(x)e^{kx} \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \int f(x)e^{kx} dx &= \varphi_k(x)e^{kx} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \\ &= \frac{1}{k} \left\{ f(x) - \frac{f'(x)}{k} + \frac{f''(x)}{k^2} - \frac{f'''(x)}{k^3} + \dots \right\} e^{kx} + C \end{aligned}$$

とくに, $k = \pm 1$ のとき

$$\begin{aligned} \int f(x)e^x dx &= \{f(x) - f'(x) + f''(x) - f'''(x) + \dots\}e^x + C \\ \int f(x)e^{-x} dx &= -\{f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \dots\}e^{-x} + C \end{aligned}$$

■