

令和6年度 熊本大学2次試験後期日程(数学問題)
理学部 数I, II, III, A, B(120分) (理科1科目と合わせて)
令和6年3月12日

問題 1 2 3

1 数列 $\{a_n\}$ は条件

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{n} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

を満たすとする。

- (1) $a_n > 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)であることを示せ。
- (2) $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)とおくとき, b_{n+1} を b_n と n を用いて表せ。
- (3) n が奇数のとき, (2) の b_n を求めよ。
- (4) n を3以上の自然数とするとき, a_n を求めよ。ただし, 次の記号を用いてもよい。

$$k!! = \begin{cases} k \cdot (k-2) \cdot (k-4) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2 & (k \text{ が偶数のとき}) \\ k \cdot (k-2) \cdot (k-4) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 & (k \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

2 四面体 OABC について, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。点 D を

$$\overrightarrow{OD} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

で定める。点 E を線分 OD の中点とする。3点 A, B, C を通る平面を α とする。

- (1) 点 E が平面 α 上にあるかどうかを判定せよ。
- (2) 点 O を通り α と平行な平面を β とする。2点 C, D を通る直線と平面 β との交点を F とする。このとき, \overrightarrow{OF} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} で表せ。
- (3) $\triangle ABC$ の重心を G とする。3点 O, A, G を通る平面と, 2点 E, F を通る直線との交点を H とする。 \overrightarrow{OH} を \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} で表せ。

3 正の整数 n に対して 2 つの定積分を

$$I_n = \int_0^{2n\pi} e^{-2x} \sin 2x \, dx, \quad J_n = \int_0^{2n\pi} e^{-2x} \cos 2x \, dx$$

とおく。

- (1) I_n と J_n の値を n で表せ。
- (2) 曲線 $y = e^{-x} \sin x$ ($0 \leq x \leq 2n\pi$) と x 軸とで囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_n とおく。 V_n を n で表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n$ を求めよ。

解答例

1 (1) 条件

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{n} + a_n \quad (*)$$

より, $a_n > 0, a_{n+1} > 0$ のとき $a_{n+2} > 0$

$a_1 > 0, a_2 > 0$ であるから, 自然数 n について $a_n > 0$

(2) (*) の両辺を $a_{n+1} \neq 0$ で割ると

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{n} + \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \text{よって} \quad b_{n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{b_n} \quad (**)$$

(3) (**) より

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{\frac{1}{n} + \frac{1}{b_n}} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{nb_n}{b_n + n} \end{aligned}$$

上式から, $b_n = 1$ のとき $b_{n+2} = 1$

$b_1 = \frac{a_2}{a_1} = 1$ であるから, n が奇数のとき $b_n = 1$

(4) (2), (3) の結果から, k を自然数とすると

$$b_{2k-1} = 1, \quad b_{2k} = \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{b_{2k-1}} = \frac{2k}{2k-1} = \frac{4k^2}{2k(2k-1)}$$

したがって

$$b_{2k-1}b_{2k} = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} \cdot \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \frac{2k}{2k-1}$$

上の第 2 式から, $n \geq 2$ のとき, $a_1 = 1$ より

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{4k^2}{2k(2k-1)} = \frac{4^{n-1}\{(n-1)!\}^2}{(2n-2)!} \\ a_{2n} &= b_{2n-1}a_{2n-1} = \frac{4^{n-1}\{(n-1)!\}^2}{(2n-2)!} \end{aligned}$$

これらは, $n = 1$ のときも成立するから

$$a_{2n-1} = a_{2n} = \frac{4^{n-1}\{(n-1)!\}^2}{(2n-2)!} \quad (n = 1, 2, \dots)$$



- 2 (1) E は線分 OD の中点であるから

$$\vec{OE} = \frac{1}{2}\vec{OD} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$

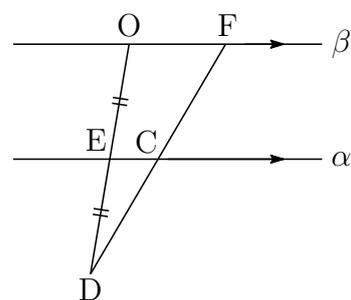
\vec{OE} の \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} の係数について

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = 1$$

よって、点 E は平面 α 上にある。

- (2) E は OD の中点であり、2点 E, C は平面 α 上の点であるから

$$\begin{aligned}\vec{OF} &= 2\vec{EC} = 2\vec{OC} - 2\vec{OE} \\ &= 2\vec{c} - 2\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\right) \\ &= -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}\end{aligned}$$



- (3) 直線 EF 上の点 H は、実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\vec{OH} &= (1-k)\vec{OE} + k\vec{OF} \\ &= (1-k)\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\right) + k\left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - k\right)\vec{a} + \left(\frac{5}{12} - \frac{5}{4}k\right)\vec{b} + \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{4}k\right)\vec{c}\end{aligned}\quad (*)$$

平面 OAG 上の点は、実数 s , t を用いて

$$s\vec{OA} + t\vec{OG} = s\vec{a} + \frac{t}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \left(s + \frac{t}{3}\right)\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b} + \frac{t}{3}\vec{c}$$

H が平面 OAG 上の点であるとき (\vec{a} , \vec{b} , \vec{c} は 1 次独立)

$$\frac{1}{3} - k = s + \frac{t}{3}, \quad \frac{5}{12} - \frac{5}{4}k = \frac{t}{3}, \quad \frac{1}{4} + \frac{5}{4}k = \frac{t}{3}$$

これを解いて $k = \frac{1}{15}$, $s = -\frac{1}{15}$, $t = 1$

$$k = \frac{1}{15} \text{ を } (*) \text{ に代入すると } \vec{OH} = \frac{4}{15}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

■

3 (1) $e^{-2x} \sin 2x$, $e^{-2x} \cos 2x$ を微分すると

$$(e^{-2x} \sin 2x)' = -2e^{-2x} \sin 2x + 2e^{-2x} \cos 2x$$

$$(e^{-2x} \cos 2x)' = -2e^{-2x} \sin 2x - 2e^{-2x} \cos 2x$$

上の2式の辺々の和および差をとると

$$\{e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)\}' = -4e^{-2x} \sin 2x$$

$$\{e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x)\}' = 4e^{-2x} \cos 2x$$

上の結果を利用すると

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2n\pi} e^{-2x} \sin 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \left[e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x) \right]_0^{2n\pi} = \frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{2n\pi} e^{-2x} \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \left[e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x) \right]_0^{2n\pi} = \frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi}) \end{aligned}$$

別解 $e^{2ix} = \cos 2x + i \sin 2x$ であるから

$$\begin{aligned} J_n + iI_n &= \int_0^{2n\pi} e^{-2x} e^{2ix} \, dx = \int_0^{2n\pi} e^{-2(1-i)x} \, dx \\ &= \frac{1}{-2(1-i)} \left[e^{-2(1-i)x} \right]_0^{2n\pi} = -\frac{1+i}{4} \left[e^{-2x} e^{2ix} \right]_0^{2n\pi} \\ &= \frac{1+i}{4}(1 - e^{-4n\pi}) \end{aligned}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} \frac{V_n}{\pi} &= \int_0^{2n\pi} (e^{-x} \sin x)^2 \, dx = \int_0^{2n\pi} e^{-2x} \sin^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} e^{-2x} \, dx - \frac{1}{2} \int_0^{2n\pi} e^{-2x} \cos 2x \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \left[e^{-2x} \right]_0^{2n\pi} - \frac{1}{2} J_n \\ &= \frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi}) = \frac{1}{8}(1 - e^{-4n\pi}) \end{aligned}$$

よって $V_n = \frac{\pi}{8}(1 - e^{-4n\pi})$

(3) (2) の結果から $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{\pi}{8}$ ■