令和６年度　熊本大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部　数 I, II, III, A, B(120 分)（理科１科目と合わせて）
令和６年３月１２日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 数列 $\{a_n\}$ は条件

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1, \\ a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1}}{n} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

を満たすとする。

(1) $a_n > 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であることを示せ。

(2) $b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，b_{n+1} を b_n と n を用いて表せ。

(3) n が奇数のとき，(2) の b_n を求めよ。

(4) n を 3 以上の自然数とするとき，a_n を求めよ。ただし，次の記号を用いてもよい。

$$k!! = \begin{cases} k\cdot(k-2)\cdot(k-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2 & (k \text{ が偶数のとき}) \\ k\cdot(k-2)\cdot(k-4)\cdots 5\cdot 3\cdot 1 & (k \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ 四面体 OABC について，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 D を

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

で定める。点 E を線分 OD の中点とする。3 点 A，B，C を通る平面を α とする。

(1) 点 E が平面 α 上にあるかどうかを判定せよ。

(2) 点 O を通り α と平行な平面を β とする。2 点 C，D を通る直線と平面 β との交点を F とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

(3) $\triangle$ABC の重心を G とする。3 点 O，A，G を通る平面と，2 点 E，F を通る直線との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 正の整数 n に対して 2 つの定積分を

$$I_n = \int_0^{2n\pi} e^{-2x} \sin 2x \, dx, \quad J_n = \int_0^{2n\pi} e^{-2x} \cos 2x \, dx$$

とおく。

(1) I_n と J_n の値を n で表せ。

(2) 曲線 $y = e^{-x} \sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2n\pi)$ と x 軸とで囲まれた部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V_n とおく。V_n を n で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 条件

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{n} + a_n \qquad (*)$$

より，$a_n > 0,\ a_{n+1} > 0$ のとき　　$a_{n+2} > 0$

$a_1 > 0,\ a_2 > 0$ であるから，自然数 n について　$a_n > 0$

(2) $(*)$ の両辺を $a_{n+1} \neq 0$ で割ると

$$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{1}{n} + \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{b_{n+1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{b_n}} \qquad (**)$$

(3) $(**)$ より

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{\frac{1}{n}+\frac{1}{b_n}} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{nb_n}{b_n+n} \end{aligned}$$

上式から，$b_n = 1$ のとき　$b_{n+2} = 1$

$b_1 = \dfrac{a_2}{a_1} = 1$ であるから，n が奇数のとき　$\boldsymbol{b_n = 1}$

(4) (2)，(3) の結果から，k を自然数とすると

$$b_{2k-1} = 1, \quad b_{2k} = \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{b_{2k-1}} = \frac{2k}{2k-1} = \frac{4k^2}{2k(2k-1)}$$

したがって

$$b_{2k-1}b_{2k} = \frac{a_{2k}}{a_{2k-1}} \cdot \frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} \quad \text{ゆえに} \quad \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \frac{2k}{2k-1}$$

上の第 2 式から，$n \geqq 2$ のとき，$a_1 = 1$ より

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{2k+1}}{a_{2k-1}} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{4k^2}{2k(2k-1)} = \frac{4^{n-1}\{(n-1)!\}^2}{(2n-2)!} \\ a_{2n} &= b_{2n-1}a_{2n-1} = \frac{4^{n-1}\{(n-1)!\}^2}{(2n-2)!} \end{aligned}$$

これらは，$n = 1$ のときも成立するから

$$a_{2n-1} = a_{2n} = \boldsymbol{\frac{4^{n-1}\{(n-1)!\}^2}{(2n-2)!}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) E は線分 OD の中点であるから

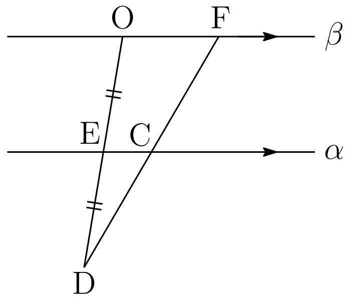
$$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{12}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ の $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の係数について

$$\frac{1}{3}+\frac{5}{12}+\frac{1}{4}=1$$

よって，点 E は平面 α 上にある．

(2) E は OD の中点であり，2 点 E，C は平面 α 上の点であるから



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OF}}&=2\overrightarrow{\mathrm{EC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OC}}-2\overrightarrow{\mathrm{OE}}\\&=2\vec{c}-2\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{12}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)\\&=\boldsymbol{-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}}\end{aligned}$$

(3) 直線 EF 上の点 H は，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OE}}+k\overrightarrow{\mathrm{OF}}\\&=(1-k)\left(\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{5}{12}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}\right)+k\left(-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{5}{6}\vec{b}+\frac{3}{2}\vec{c}\right)\\&=\left(\frac{1}{3}-k\right)\vec{a}+\left(\frac{5}{12}-\frac{5}{4}k\right)\vec{b}+\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{4}k\right)\vec{c}\qquad(*)\end{aligned}$$

平面 OAG 上の点は，実数 s, t を用いて

$$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\vec{a}+\frac{t}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\left(s+\frac{t}{3}\right)\vec{a}+\frac{t}{3}\vec{b}+\frac{t}{3}\vec{c}$$

H が平面 OAG 上の点であるとき ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は 1 次独立)

$$\frac{1}{3}-k=s+\frac{t}{3},\quad \frac{5}{12}-\frac{5}{4}k=\frac{t}{3},\quad \frac{1}{4}+\frac{5}{4}k=\frac{t}{3}$$

これを解いて　　$k=\dfrac{1}{15}$, $s=-\dfrac{1}{15}$, $t=1$

$k=\dfrac{1}{15}$ を $(*)$ に代入すると　　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{4}{15}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $e^{-2x}\sin 2x$，$e^{-2x}\cos 2x$ を微分すると

$$(e^{-2x}\sin 2x)' = -2e^{-2x}\sin 2x + 2e^{-2x}\cos 2x$$
$$(e^{-2x}\cos 2x)' = -2e^{-2x}\sin 2x - 2e^{-2x}\cos 2x$$

上の 2 式の辺々の和および差をとると

$$\{e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)\}' = -4e^{-2x}\sin 2x$$
$$\{e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x)\}' = 4e^{-2x}\cos 2x$$

上の結果を利用すると

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{2n\pi} e^{-2x}\sin 2x\,dx \\
&= -\frac{1}{4}\Big[\ e^{-2x}(\sin 2x + \cos 2x)\ \Big]_0^{2n\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi})}, \\
J_n &= \int_0^{2n\pi} e^{-2x}\cos 2x\,dx \\
&= \frac{1}{4}\Big[\ e^{-2x}(\sin 2x - \cos 2x)\ \Big]_0^{2n\pi} = \boldsymbol{\frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi})}
\end{aligned}$$

別解 $e^{2ix} = \cos 2x + i\sin 2x$ であるから

$$\begin{aligned}
J_n + iI_n &= \int_0^{2n\pi} e^{-2x}e^{2ix}\,dx = \int_0^{2n\pi} e^{-2(1-i)x}\,dx \\
&= \frac{1}{-2(1-i)}\Big[\ e^{-2(1-i)x}\ \Big]_0^{2n\pi} = -\frac{1+i}{4}\Big[\ e^{-2x}e^{2ix}\ \Big]_0^{2n\pi} \\
&= \frac{1+i}{4}(1 - e^{-4n\pi})
\end{aligned}$$

(2) (1) の結果を利用すると

$$\begin{aligned}
\frac{V_n}{\pi} &= \int_0^{2n\pi} (e^{-x}\sin x)^2\,dx = \int_0^{2n\pi} e^{-2x}\sin^2 x\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2n\pi} e^{-2x}\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2n\pi} e^{-2x}\cos 2x\,dx \\
&= -\frac{1}{4}\Big[\ e^{-2x}\ \Big]_0^{2n\pi} - \frac{1}{2}J_n \\
&= \frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi}) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}(1 - e^{-4n\pi}) = \frac{1}{8}(1 - e^{-4n\pi})
\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{V_n = \frac{\pi}{8}(1 - e^{-4n\pi})}$

(3) (2) の結果から $\quad \displaystyle\lim_{n\to\infty} V_n = \boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$