令和５年度　熊本大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部　数 I, II, III, A, B(120 分)（理科１科目と合わせて）
令和５年３月 12 日

問題 $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ n は正の整数とする。

(1) 正の整数 k に対して，$(k+1)^n-1$ は k の倍数となることを示せ。

(2) 2^n-1 が 7 で割り切れるためには n が 3 の倍数であることが必要十分条件であることを証明せよ。

(3) 4^n-1 が 17 で割り切れるためには n が 4 の倍数であることが必要十分条件であることを証明せよ。

(4) 4^n-1 が 833 で割り切れるためには n が 12 の倍数であることが必要条件であることを証明せよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ α を正の数とし，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha \\ a_{n+1} &= \sqrt{9{a_n}^2+12} \quad (n=1,2,3,\cdots) \\ b_n &= \sqrt{3({a_n}^2+1)} \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{aligned}$$

によって定められる。

(1) $a_{n+1}>3a_n$ を示せ。

(2) $\dfrac{b_n}{a_n}>\dfrac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{{b_n}^2}{a_na_{n+1}}$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 定数ではない多項式 $f(x)$ について不等式

$$(*)\qquad |f(x)| \leqq \int_0^x \sin t\,dt$$

を $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で考える。

(1) $f(x)$ の次数は少なくとも 4 であることを示せ。つまり，$0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で不等式 $(*)$ をみたす 1 次式，2 次式，3 次式は存在しないことを示せ。

(2) $f(x)$ を $0\leqq x\leqq 2\pi$ の範囲で不等式 $(*)$ をみたす 4 次式とするとき，$f'(\pi)=0$ となることを示せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $a^n - b^n = (a-b)\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a^{n-j}b^{j-1}$ であるから，

これに $a = k+1$，$b = 1$ を代入すると

$$(k+1)^n - 1 = k\sum_{j=1}^{n}(k+1)^{n-j}$$

よって，$(k+1)^n - 1$ は k の倍数である．

別解 $k+1 \equiv 1 \pmod{k}$ であるから

$$(k+1)^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod{k}$$

よって，$(k+1)^n - 1$ は k の倍数である．

(2) $2^1 \equiv 2,\quad 2^2 \equiv 4,\quad 2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ より

$$\begin{array}{ll} n \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき} & 2^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{7} \\ n \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき} & 2^n - 1 \equiv 2 - 1 \equiv 1 \pmod{7} \\ n \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき} & 2^n - 1 \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod{7} \end{array}$$

よって，題意は成立する．

(3) $4^1 \equiv 4,\quad 4^2 \equiv -1,\quad 4^3 \equiv -4,\quad 4^4 \equiv 1 \pmod{17}$ より

$$\begin{array}{ll} n \equiv 0 \pmod{4} \text{ のとき} & 4^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{17} \\ n \equiv 1 \pmod{4} \text{ のとき} & 4^n - 1 \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod{17} \\ n \equiv 2 \pmod{4} \text{ のとき} & 4^n - 1 \equiv -1 - 1 \equiv -2 \pmod{17} \\ n \equiv 3 \pmod{4} \text{ のとき} & 4^n - 1 \equiv -4 - 1 \equiv -5 \pmod{17} \end{array}$$

よって，題意は成立する．

(4) $833 = 7^2 \times 17$，$4^n - 1 = (2^n+1)(2^n-1)$，$2^n + 1 \not\equiv 0 \pmod{7}$ であるから (2)，(3) の結論により，$4^n - 1$ が 7×17 で割り切れるためには n は 3 の倍数かつ 4 の倍数，すなわち，12 の倍数である．

したがって，$4^n - 1$ が $833 = 7^2 \times 17$ で割り切れるためには n が 12 の倍数であることが必要条件である．

補足 $a = 4^{12}$ とおくと，$a-1$ は 7×17 で割り切れる．

$$\begin{aligned} a-1 &= (4+1)(4-1)(4^2+4+1)(4^2-4+1)(4^2+1)(4^4-4^2+1) \\ &= 5\cdot 3\cdot 21\cdot 13\cdot 17\cdot 241 = 3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 17\cdot 241 \end{aligned}$$

(1)～(3) から，$p=7,\ 17$ のとき

$$a^N - 1 = (a-1)\sum_{j=1}^{N} a^{N-j}, \quad \sum_{j=1}^{N} a^{N-j} \equiv \sum_{j=1}^{N} 1^{N-j} \equiv N \pmod{p}$$

$N\equiv 0 \pmod{7}$ のとき，$4^{12N}-1$ は $833 = 7^2\cdot 17$ で割り切れる．
$N\equiv 0 \pmod{17}$ のとき，$4^{12N}-1$ は $2023 = 7\cdot 17^2$ で割り切れる． ■

2 (1) 与えれた漸化式から

$$a_{n+1} - 3a_n = \sqrt{9a_n{}^2+12} - 3a_n = \frac{12}{\sqrt{9a_n{}^2+12}+3a_n}$$

$a_1 = \alpha > 0$，$a_{n+1} = \sqrt{9a_n{}^2+12}$ より，$a_n > 0$ であるから

$$a_{n+1} - 3a_n > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} > 3a_n$$

(2) 漸化式から　$a_{n+1}{}^2 - a_n{}^2 = (9a_n{}^2+12) - a_n{}^2 = 8a_n{}^2 + 12 > 0$
$a_{n+1}{}^2 > a_n{}^2$ であるから

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{3(a_n{}^2+1)}}{a_n} = \sqrt{3+\frac{3}{a_n{}^2}} > \sqrt{3+\frac{3}{a_{n+1}{}^2}} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$$

(3) (1) の結果から　$a_n > 3^{n-1}\alpha \quad (n>1)$　ゆえに　$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{3+\frac{3}{a_n{}^2}} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(4) $a_{n+1} = \sqrt{9a_n{}^2+12}$ より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{9+\frac{12}{a_n{}^2}} = 3 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{3}$$

よって　$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n{}^2}{a_na_{n+1}} = \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2\cdot\frac{a_n}{a_{n+1}} = (\sqrt{3})^2\cdot\frac{1}{3} = \mathbf{1}$$ ■

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $(*)$ より $\quad |f(x)| \leqq \displaystyle\int_0^x \sin t\,dt = \Big[-\cos t\Big]_0^x = 1-\cos x$

$f(0)=0$，$f(2\pi)=0$ であるから，$h>0$，$0<a<2\pi$ とすると

$$\left|\frac{f(h)-f(0)}{h}\right| \leqq \frac{1-\cos h}{h},\qquad \left|\frac{f(a)-f(2\pi)}{a-2\pi}\right| \leqq \frac{1-\cos a}{2\pi-a}$$

$g(x)=\cos x$ とおくと，$g'(x)=-\sin x$

$$\lim_{h\to+0}\frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h\to+0}\frac{g(0)-g(h)}{h} = -g'(0)=0$$
$$\lim_{a\to 2\pi-0}\frac{1-\cos a}{2\pi-a} = \lim_{a\to 2\pi-0}\frac{g(2\pi)-g(a)}{2\pi-a} = g'(2\pi)=0$$

したがって $\quad f'(0)=\displaystyle\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0,$

$$f'(2\pi)=\lim_{a\to 2\pi-0}\frac{f(a)-f(2\pi)}{a-2\pi}=0$$

$f(0)=f'(0)$，$f(2\pi)=f'(2\pi)=0$ であるから，$f(x)$ は $x^2(x-2\pi)^2$ を因数にもつから (定数関数ではない)，$f(x)$ の次数は少なくとも 4 である．

(2) $f(x)$ が 4 次式であるとき，(1) の結果から，定数 k $(k\neq 0)$ を用いて

$$f(x)=kx^2(x-2\pi)^2$$

とおける．したがって

$$f'(x)=k\{2x(x-2\pi)^2+2x^2(x-2\pi)\}=4kx(x-2\pi)(x-\pi)$$

よって $\quad f'(\pi)=0$ ■