

令和5年度 熊本大学2次試験後期日程(数学問題)
理学部 数I, II, III, A, B(120分) (理科1科目と合わせて)
令和5年3月12日

1 n は正の整数とする。

- (1) 正の整数 k に対して, $(k+1)^n - 1$ は k の倍数となることを示せ。
- (2) $2^n - 1$ が7で割り切れるためには n が3の倍数であることが必要十分条件であることを証明せよ。
- (3) $4^n - 1$ が17で割り切れるためには n が4の倍数であることが必要十分条件であることを証明せよ。
- (4) $4^n - 1$ が833で割り切れるためには n が12の倍数であることが必要条件であることを証明せよ。

2 α を正の数とし, 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha \\ a_{n+1} &= \sqrt{9a_n^2 + 12} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n &= \sqrt{3(a_n^2 + 1)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

によって定められる。

- (1) $a_{n+1} > 3a_n$ を示せ。
- (2) $\frac{b_n}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$ を示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{a_n a_{n+1}}$ を求めよ。

3 定数ではない多項式 $f(x)$ について不等式

$$(*) \quad |f(x)| \leq \int_0^x \sin t \, dt$$

を $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で考える。

- (1) $f(x)$ の次数は少なくとも4であることを示せ。つまり, $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式(*)をみたす1次式, 2次式, 3次式は存在しないことを示せ。
- (2) $f(x)$ を $0 \leq x \leq 2\pi$ の範囲で不等式(*)をみたす4次式とするとき, $f'(\pi) = 0$ となることを示せ。

解答例

$$\boxed{1} \quad (1) \quad a^n - b^n = (a - b) \sum_{j=1}^n a^{n-j} b^{j-1} \text{ であるから,}$$

これに $a = k + 1$, $b = 1$ を代入すると

$$(k + 1)^n - 1 = k \sum_{j=1}^n (k + 1)^{n-j}$$

よって, $(k + 1)^n - 1$ は k の倍数である.

別解 $k + 1 \equiv 1 \pmod{k}$ であるから

$$(k + 1)^n - 1 \equiv 1^n - 1 \equiv 0 \pmod{k}$$

よって, $(k + 1)^n - 1$ は k の倍数である.

$$(2) \quad 2^1 \equiv 2, \quad 2^2 \equiv 4, \quad 2^3 \equiv 1 \pmod{7} \text{ より}$$

$$n \equiv 0 \pmod{3} \text{ のとき} \quad 2^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$$

$$n \equiv 1 \pmod{3} \text{ のとき} \quad 2^n - 1 \equiv 2 - 1 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$n \equiv 2 \pmod{3} \text{ のとき} \quad 2^n - 1 \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod{7}$$

よって, 題意は成立する.

$$(3) \quad 4^1 \equiv 4, \quad 4^2 \equiv -1, \quad 4^3 \equiv -4, \quad 4^4 \equiv 1 \pmod{17} \text{ より}$$

$$n \equiv 0 \pmod{4} \text{ のとき} \quad 4^n - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{17}$$

$$n \equiv 1 \pmod{4} \text{ のとき} \quad 4^n - 1 \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod{17}$$

$$n \equiv 2 \pmod{4} \text{ のとき} \quad 4^n - 1 \equiv -1 - 1 \equiv -2 \pmod{17}$$

$$n \equiv 3 \pmod{4} \text{ のとき} \quad 4^n - 1 \equiv -4 - 1 \equiv -5 \pmod{17}$$

よって, 題意は成立する.

$$(4) \quad 833 = 7^2 \times 17, \quad 4^n - 1 = (2^n + 1)(2^n - 1), \quad 2^n + 1 \not\equiv 0 \pmod{7} \text{ であるから}$$

(2), (3) の結論により, $4^n - 1$ が 7×17 で割り切れるためには n は 3 の倍数かつ 4 の倍数, すなわち, 12 の倍数である.

したがって, $4^n - 1$ が $833 = 7^2 \times 17$ で割り切れるためには n が 12 の倍数であることが必要条件である.

補足 $a = 4^{12}$ とおくと, $a - 1$ は 7×17 で割り切れる.

$$\begin{aligned} a - 1 &= (4 + 1)(4 - 1)(4^2 + 4 + 1)(4^2 - 4 + 1)(4^2 + 1)(4^4 - 4^2 + 1) \\ &= 5 \cdot 3 \cdot 21 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 241 \end{aligned}$$

(1)~(3) から, $p = 7, 17$ のとき

$$a^N - 1 = (a - 1) \sum_{j=1}^N a^{N-j}, \quad \sum_{j=1}^N a^{N-j} \equiv \sum_{j=1}^N 1^{N-j} \equiv N \pmod{p}$$

$N \equiv 0 \pmod{7}$ のとき, $4^{12N} - 1$ は $833 = 7^2 \cdot 17$ で割り切れる.

$N \equiv 0 \pmod{17}$ のとき, $4^{12N} - 1$ は $2023 = 7 \cdot 17^2$ で割り切れる.

2 (1) 与えられた漸化式から

$$a_{n+1} - 3a_n = \sqrt{9a_n^2 + 12} - 3a_n = \frac{12}{\sqrt{9a_n^2 + 12} + 3a_n}$$

$a_1 = \alpha > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{9a_n^2 + 12}$ より, $a_n > 0$ であるから

$$a_{n+1} - 3a_n > 0 \quad \text{ゆえに} \quad a_{n+1} > 3a_n$$

(2) 漸化式から $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (9a_n^2 + 12) - a_n^2 = 8a_n^2 + 12 > 0$
 $a_{n+1}^2 > a_n^2$ であるから

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\sqrt{3(a_n^2 + 1)}}{a_n} = \sqrt{3 + \frac{3}{a_n^2}} > \sqrt{3 + \frac{3}{a_{n+1}^2}} = \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}$$

(3) (1) の結果から $a_n > 3^{n-1}\alpha$ ($n > 1$) ゆえに $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3 + \frac{3}{a_n^2}} = \sqrt{3}$$

(4) $a_{n+1} = \sqrt{9a_n^2 + 12}$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{9 + \frac{12}{a_n^2}} = 3 \quad \text{ゆえに} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{3}$$

$$\text{よって} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n^2}{a_n a_{n+1}} = \left(\frac{b_n}{a_n} \right)^2 \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} = (\sqrt{3})^2 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\boxed{3} \quad (1) \quad (*) \text{ より } |f(x)| \leq \int_0^x \sin t \, dt = \left[-\cos t \right]_0^x = 1 - \cos x$$

$f(0) = 0, f(2\pi) = 0$ であるから, $h > 0, 0 < a < 2\pi$ とすると

$$\left| \frac{f(h) - f(0)}{h} \right| \leq \frac{1 - \cos h}{h}, \quad \left| \frac{f(a) - f(2\pi)}{a - 2\pi} \right| \leq \frac{1 - \cos a}{2\pi - a}$$

$g(x) = \cos x$ とおくと, $g'(x) = -\sin x$

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{1 - \cos h}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{g(0) - g(h)}{h} = -g'(0) = 0$$

$$\lim_{a \rightarrow 2\pi-0} \frac{1 - \cos a}{2\pi - a} = \lim_{a \rightarrow 2\pi-0} \frac{g(2\pi) - g(a)}{2\pi - a} = g'(2\pi) = 0$$

$$\text{したがって } f'(0) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0,$$

$$f'(2\pi) = \lim_{a \rightarrow 2\pi-0} \frac{f(a) - f(2\pi)}{a - 2\pi} = 0$$

$f(0) = f'(0), f(2\pi) = f'(2\pi) = 0$ であるから, $f(x)$ は $x^2(x - 2\pi)^2$ を因数にもつから (定数関数ではない), $f(x)$ の次数は少なくとも 4 である.

(2) $f(x)$ が 4 次式であるとき, (1) の結果から, 定数 $k (k \neq 0)$ を用いて

$$f(x) = kx^2(x - 2\pi)^2$$

とおける. したがって

$$f'(x) = k\{2x(x - 2\pi)^2 + 2x^2(x - 2\pi)\} = 4kx(x - 2\pi)(x - \pi)$$

よって $f'(\pi) = 0$