令和４年度　熊本大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部　数 I, II, III, A, B(120 分)（理科１科目と合わせて）
令和４年３月12日

1 平面上の 4 点を O(0, 0)，A(4, 0)，B(3, 3)，C(1, 3) とし，s と t は正の数とする。OA を $s:t$ に内分する点を P，AB を $s:t$ に内分する点を Q，BC を $s:t$ に内分する点を R，CO を $s:t$ に内分する点を S とする．以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ のなす角を $\theta\ (0<\theta<\pi)$ とするとき，$\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ を求めよ。

(3) 四角形 PQRS の面積を $s,\ t$ を用いて表せ。

2 円 C を $x^2+y^2-8x-4y-5=0$ と定める。円 C の中心を A とする。以下の問いに答えよ。

(1) A の座標および C の半径を求めよ。

(2) A および $\mathrm{P}\left(5,\ \dfrac{2}{3}\right)$ を通る直線を ℓ とする。ℓ と C の共有点をすべて求めよ。

(3) (2) で求めた点のうち，y 座標が負の点を Q とする。A を通り x 軸に平行な直線を m とする。m と C の共有点のうち x 座標が大きい点を R とする。三角形 PQR の面積を求めよ。

(4) S は C 上の点で，三角形 PQS の面積と三角形 PQR の面積は等しいとする。このような S をすべて求めよ。

3 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ のとき，曲線 C_1 を $y=\sin x$，曲線 C_2 を $y=\cos 2x$ および曲線 C_3 を $y=|\cos 2x|$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 の共有点の x 座標をすべて求めよ。

(2) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) C_1 と C_3 で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) O(0, 0)，A(4, 0)，B(3, 3)，C(1, 3)．$k=\dfrac{s}{s+t}$ とおくと，線分 OA，AB，BC，CO を $k:1-k$ にそれぞれ内分した点が P，Q，R，S であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}=k(4,\ 0)=(4k,\ 0),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-k)(4,\ 0)+k(3,\ 3)=(4-k,\ 3k),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-k)(3,\ 3)+k(1,\ 3)=(3-2k,\ 3),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1-k)(1,\ 3)=(1-k,\ 3-3k)$$

これから

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4-k,\ 3k)-(4k,\ 0)=(4-5k,\ 3k),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-k,\ 3-3k)-(4k,\ 0)=(1-5k,\ 3-3k)$$

したがって
$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PS}}&=(4-5k)(1-5k)+3k(3-3k)\\&=4-16k+16k^2=4(1-2k)^2\geqq 0\end{aligned}$$

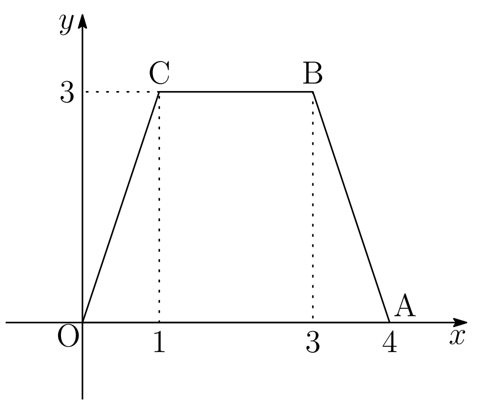
よって　$\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$

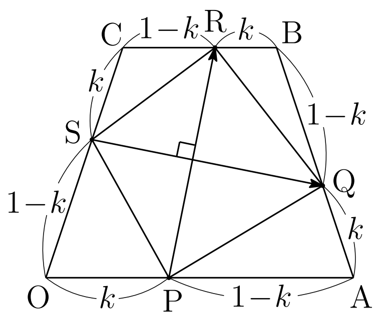
(2) $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(3-6k,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=(3,-3+6k)$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=(3-6k)\cdot 3+3(-3+6k)=\mathbf{0}$$

(3) (2) の結果より，PR⊥SQ であるから，求める面積は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{PR}}||\overrightarrow{\mathrm{SQ}}|&=\frac{1}{2}\{(3-6k)^2+9\}=\frac{9}{2}\{(1-2k)^2+1\}\\&=\frac{9}{2}\left\{\left(1-\frac{2s}{s+t}\right)^2+1\right\}=\frac{9}{2}\left\{\left(\frac{t-s}{s+t}\right)^2+1\right\}=\boldsymbol{\frac{9(s^2+t^2)}{(s+t)^2}}\end{aligned}$$





$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $C: x^2+y^2-8x-4y-5=0$ より　$(x-4)^2+(y-2)^2=25$　$\cdots$①

よって　中心 A$\mathbf{(4,\ 2)}$，半径 $\mathbf{5}$

(2) A$(4,\ 2)$，P$\left(5,\ \dfrac{2}{3}\right)$ を通る直線 ℓ の方程式は

$$y-2=-\frac{4}{3}(x-4) \quad \cdots ②$$

② を ① に代入すると

$$(x-4)^2+\frac{16}{9}(x-4)^2=25 \quad \text{ゆえに} \quad (x-4)^2=9$$

$x-4=\pm3$ を ② に代入すると　$y-2=\mp4$　(複号同順)

したがって　$x=4\pm3,\ y=2\mp4$ (複号同順)　よって　$\mathbf{(7,-2)}$，$\mathbf{(1,\ 6)}$

(3) (1) の結果より，Q$(7,-2)$．条件より，R$(9,\ 2)$

P$\left(5,\ \dfrac{2}{3}\right)$ より　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\left(2,-\dfrac{8}{3}\right)$，　$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(4,\ \dfrac{4}{3}\right)$

したがって　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\left|2\cdot\dfrac{4}{3}-\left(-\dfrac{8}{3}\right)\cdot4\right|=\mathbf{\dfrac{20}{3}}$

(4) 点 $\mathrm{R}(9, 2)$ を通り，ℓ に平行な直線を ℓ_1 とすると，その方程式は

$$y - 2 = -\frac{4}{3}(x - 9) \quad \cdots ③$$

③ と C の方程式から y を消去すると ($x - 9$ を因数にもつことに着目)

$$\begin{aligned}(x-4)^2 + \frac{16}{9}(x-9)^2 &= 25 \\ \{(x-9)+5\}^2 + \frac{16}{9}(x-9)^2 &= 25 \\ \frac{25}{9}(x-9)^2 + 10(x-9) &= 0 \\ 5(x-9)\left\{\frac{5}{9}(x-9) + 2\right\} &= 0\end{aligned}$$

$x - 9 = -\dfrac{18}{5}$ を ③ に代入すると　$y - 2 = \dfrac{24}{5}$

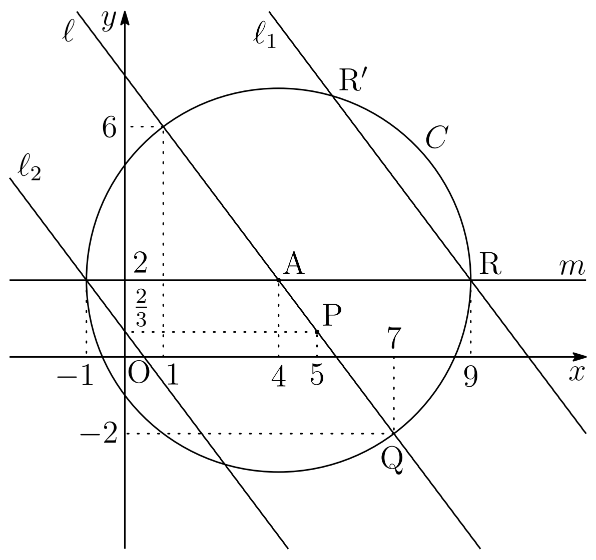
C と ℓ_1 の交点で R と異なる点を R$'$ とすると　$\mathrm{R}'\left(\dfrac{27}{5},\ \dfrac{34}{5}\right)$

A に関して R と対称な点は　$(-1,\ 2)$

A に関して R$'$ と対称な点は

$$\left(2{\cdot}4 - \frac{27}{5},\ 2{\cdot}2 - \frac{34}{5}\right) \quad \text{すなわち} \quad \left(\frac{13}{5}, -\frac{14}{5}\right)$$

よって，条件を満たす点 S は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{27}{5},\ \dfrac{34}{5}\right)}$**，**$\boldsymbol{(-1,\ 2)}$**，**$\boldsymbol{\left(\dfrac{13}{5}, -\dfrac{14}{5}\right)}$



補足　A に関して R と対称な点 $(-1,\ 2)$ を通り，ℓ に平行な直線を ℓ_2 とすると，S は C と ℓ_1 および ℓ_2 との交点である．

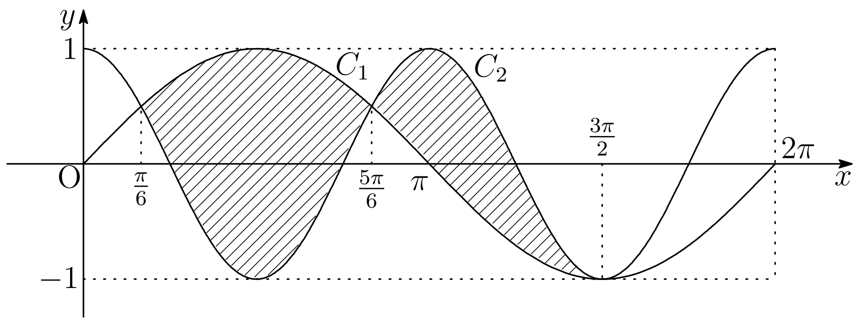
$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $C_1 : y = \sin x$ と $C_2 : y = \cos 2x$ の方程式から y を消去すると

$$\sin x = \cos 2x \quad ゆえに \quad \sin x = 1 - 2\sin^2 x$$

したがって　$(2\sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$　よって　$\boldsymbol{x = \frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6},\ \frac{3\pi}{2}}$

(2) 求める面積を S とすると

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (\sin x - \cos 2x)\,dx + \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{3}{2}\pi} (\cos 2x - \sin x)\,dx \\
&= -\left[\ \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x\ \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} + \left[\ \cos x + \frac{1}{2}\sin 2x\ \right]_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{2}} \\
&= -2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{3}\right) + \left(\cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) + \left(\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 3\pi\right) \\
&= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) + \left(\cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) + 0 \\
&= 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{9\sqrt{3}}{4}}
\end{aligned}$$



(3) 求める回転体の体積は，図の斜線部分を x 軸の回りに 1 回転させたものであるから，その体積を V とすると，$x=\dfrac{\pi}{2}$ に関する対称性に注意して

$$\begin{aligned}\frac{V}{2\pi} &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \cos^2 2x)\,dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{1+\cos 4x}{2}\right) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{16}\end{aligned}$$

よって　　$\boldsymbol{V = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}\pi}$