令和３年度　熊本大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部　数 I, II, III, A, B(120 分)（理科１科目と合わせて）
令和３年３月 12 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 164 を 2 進法で表せ。

(2) 2 進法で

$$n = a_5 2^5 + a_4 2^4 + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0$$

と表された正の整数 n を考える。ただし各 a_i は 0 か 1 である。n が 7 で割り切れるためには，

$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + a_3 + 2a_4 + 4a_5$$

が 7 で割り切れることが必要十分であることを示せ。

(3) 正の整数 n を 2 進法で

$$n = \sum_{j=0}^{k} a_j 2^j$$

と表す。ただし各 a_j は 0 か 1 である。n が 3 で割り切れるためには，

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j a_j$$

が 3 で割り切れることが必要十分であることを示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\alpha,\ \beta$ を相異なる複素数とし，r を 0 でない実数とする。複素数 z は

$$z - \alpha = ri(z - \beta)$$

を満たすとする。ただし i は虚数単位である。

(1) 複素数平面上の 3 点 A(α)，B(β)，C(z) がなす三角形の面積の r を動かしたときの最大値 $S(\alpha,\ \beta)$ を用いて表せ。またそのときの r の値をすべて求めよ。

(2) $|\alpha| = 1$，$\alpha \neq \pm 1$ のとき，$\mathrm{S}\left(\alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}\right)$ の最大値を求めよ。またそのときの α の値をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $a,\ b > 0$ とする。2 つの放物線が互いに直交するとは，2 つの放物線が 2 つの異なる交点を持ち，各交点においてそれぞれの接線が直交することを言う。

(1) 放物線 $y = \dfrac{1}{3}x^2$ の $(0,\ 0)$ 以外の点 P における法線と y 軸との交点の y 座標を $y(\mathrm{P})$ とするとき，$y(\mathrm{P})$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの放物線 $y = \dfrac{1}{3}x^2$，$y = a - bx^2$ が互いに直交しているとする。このとき a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) a は (2) で求めた範囲にあるとする。2 つの放物線 $y = \dfrac{1}{3}x^2$，$y = a - bx^2$ が互いに直交するとき，この 2 つの放物線で囲まれた図形の面積を a を用いて表せ。

解答例

$\boxed{\textbf{1}}$ (1) $164 = 128 + 32 + 4 = 2^7 + 2^5 + 2^2 = \mathbf{10100100_{(2)}}$

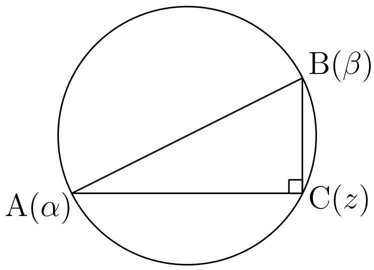
(2) 法 7 について，$2^3 \equiv 1,\ 2^4 \equiv 2,\ 2^5 \equiv 4 \pmod 7$

$$\begin{aligned} n &= a_5 2^5 + a_4 2^4 + a_3 2^3 + a_2 2^2 + a_1 2^1 + a_0 2^0 \\ &\equiv a_5 \cdot 4 + a_4 \cdot 2 + a_3 \cdot 1 + a_2 \cdot 4 + a_1 \cdot 2 + a_0 \cdot 1 \\ &\equiv a_0 + 2a_1 + 4a_2 + a_3 + 2a_4 + 4a_5 \qquad \pmod 7 \end{aligned}$$

(3) 法 3 について，$2 \equiv -1 \pmod 3$

$$n = \sum_{j=0}^{k} a_j 2^j \equiv \sum_{j=0}^{k} (-1)^j a_j \qquad \pmod 3$$

$\boxed{\textbf{2}}$ (1) $z - \alpha = ri(z - \beta)$，$\alpha \neq \beta$，$r$ は 0 でない実数より，$z \neq \beta$ であるから



$$\frac{\alpha - z}{\beta - z} = ri$$

ゆえに $\quad \dfrac{\mathrm{CA}}{\mathrm{BC}} = r, \quad \angle\mathrm{BCA} = \dfrac{\pi}{2}$

したがって，C は A，B を直径の両端とする円周上の 2 点 A，B を除く円周上の点である．相加平均・相乗平均の大小関係により

$$|\alpha - \beta|^2 = \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 \geqq 2\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA} = 4\triangle\mathrm{ABC}$$

等号は，$\mathrm{BC} = \mathrm{CA}$ のときであるから

$$\boldsymbol{r = \pm 1}, \quad \boldsymbol{S(\alpha,\ \beta) = \frac{1}{4}|\alpha - \beta|^2}$$

(2) $|\alpha| = 1$，$\alpha \neq \pm 1$ より，$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ $(0 < \theta < \pi,\ \pi < \theta < 2\pi)$ とおき，(2) の結果を利用すると

$$\begin{aligned} S\left(\alpha,\ \frac{1}{\alpha}\right) &= \frac{1}{4}\left|\alpha - \frac{1}{\alpha}\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left|(\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta - i\sin\theta)\right|^2 \\ &= \sin^2\theta \end{aligned}$$

$\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$，すなわち，$\boldsymbol{\alpha = \pm i}$ のとき，最大値 $\mathbf{1}$ をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $y=\dfrac{1}{3}x^2$ より　$y'=\dfrac{2}{3}x$

放物線 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{3}t^2\right)$ における法線の方程式は $(t\neq 0)$

$$y-\frac{1}{3}t^2=-\frac{3}{2t}(x-t)\quad \text{すなわち}\quad y=-\frac{3}{2t}x+\frac{1}{3}t^2+\frac{3}{2}$$

したがって　$y(\mathrm{P})=\dfrac{1}{3}t^2+\dfrac{3}{2}$　よって　$\boldsymbol{y(\mathrm{P})>\dfrac{3}{2}}$

(2) $y=a-bx^2$ より　$y'=-2bx$

2 つの放物線 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ と $y=a-bx^2$ が点 P で直交しているとすると

$$\frac{1}{3}t^2=a-bt^2,\quad \frac{2}{3}t\cdot(-2bt)=-1$$

上の第 2 式から　$t^2=\dfrac{3}{4b}\cdots$①　これを上の第 1 式に代入すると

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4b}=a-b\cdot\frac{3}{4b}\quad \text{ゆえに}\quad a=\frac{3}{4}+\frac{1}{4b}\cdots\text{②}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{a>\frac{3}{4}}$$

(3) 2 つの放物線 $y=\dfrac{1}{3}x^2$ と $y=a-bx^2$ は y 軸に関して対称であるから，これらの放物線の交点の x 座標を $\pm t$ とし $(t>0)$ し，その囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned}S&=\int_{-t}^{t}\left\{(a-bx^2)-\frac{1}{3}x^2\right\}dx\\&=-\left(b+\frac{1}{3}\right)\int_{-t}^{t}(x+t)(x-t)\,dx\\&=\left(b+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}(2t)^3=\frac{4}{3}bt^3+\frac{4}{9}t^3\end{aligned}$$

①，② より　$\dfrac{1}{4b}=\dfrac{t^2}{3}=a-\dfrac{3}{4}$

よって　$S=\dfrac{16}{9}bt^2\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4b}\right)t=\dfrac{16}{9}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot a\sqrt{3\left(a-\dfrac{3}{4}\right)}$

$=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}a\sqrt{3(4a-3)}}$