令和２年度　熊本大学２次試験後期日程 (数学問題)
理学部　令和２年３月12日

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ は次の漸化式を満たすものとする。

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{{a_n}^2 + 2}{2a_n + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 n に対して $a_n > 0$ であることを示せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ を数列 $\{a_n\}$ を用いて次のように定める。

$$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(3) a_n を求めよ。

$\boxed{2}$ A，B，C は空間の３点で，三角形をなすとする。A，B，C を含む平面を α とし，O は α に含まれない点とする。D を OA の中点とし，X を線分 BD 上の点とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OX}} = k\vec{a} + \ell\vec{b}$ とおくとき，k を ℓ で表せ。

(2) E は O，C を通る直線上の点で，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たすとする。X，E を通る直線と α の交点を Y とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OY}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および ℓ で表せ。

(3) F を A，B の中点とし，Y が C，F を通る直線上の点であるとする。ℓ を求めよ。

$\boxed{3}$ a，b，c を実数とし，関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ は $x = 1$ で極大値 0 をとるとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) a，b を c を用いて表せ。

(2) c のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を c を用いて表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 与えられた漸化式

$$(*)\quad a_1=2,\quad a_{n+1}=\frac{{a_n}^2+2}{2a_n+1}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$

について，$n=k$ のとき，$a_k>0$ と仮定すると，

$$a_{k+1}=\frac{{a_k}^2+2}{2a_k+1}>0$$

$a_1=2>0$ であるから，数学的帰納法により，すべての自然数 n に対して

$$a_n>0$$

(2) 漸化式 $(*)$ から
$$a_{n+1}-1=\frac{{a_n}^2+2}{2a_n+1}-1=\frac{(a_n-1)^2}{2a_n+1}$$
$$a_{n+1}+2=\frac{{a_n}^2+2}{2a_n+1}+2=\frac{(a_n+2)^2}{2a_n+1}$$

$a_n+2\neq 0$ に注意して $\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}+2}=\left(\dfrac{a_n-1}{a_n+2}\right)^2$ よって $\boldsymbol{b_{n+1}={b_n}^2}$

補足 漸化式 $(*)$ の特性方程式は

$$x=\frac{x^2+2}{2x+1}\quad 整理すると\quad (x+2)(x-1)=0$$

これから，b_n は，a_n+2 と a_n-1 が分母と分子である．

(3) $$b_1=\frac{a_1-1}{a_1+2}=\frac{2-1}{2+2}=\frac{1}{4}>0$$

これと (2) の結果から，すべての自然数 n に対して $b_n>0$

$B_n=\log_2 b_n$ とおくと

$$\log_2 b_{n+1}=\log_2 {b_n}^2\quad ゆえに\quad B_{n+1}=2B_n$$
$$B_1=\log_2 b_1=\log_2\frac{1}{4}=-2$$

数列 $\{B_n\}$ は初項 -2，公比 2 の等比数列であるから

$$B_n=-2\cdot 2^{n-1}=-2^n\quad ゆえに\quad b_n=2^{B_n}=2^{-2^n}$$

$b_n=\dfrac{a_n-1}{a_n+2}$ より $a_n=\dfrac{1+2b_n}{1-b_n}=\dfrac{1+2\cdot 2^{-2^n}}{1-2^{-2^n}}=\boldsymbol{\dfrac{2^{2^n}+2}{2^{2^n}-1}}$

補足 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$ は，特性方程式の解である．

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) D は OA の中点であるから，$\vec{a} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = k\vec{a} + \ell\vec{b} = 2k\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \ell\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

X が線分 BD 上の点であるから

$$2k + \ell = 1,\ \ 0 \leqq \ell \leqq 1 \quad \text{よって} \quad \boldsymbol{k = \frac{1-\ell}{2}\ \ (0 \leqq \ell \leqq 1)}$$

(2) Y は直線 XE 上の点であるから，実数 s を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = s\overrightarrow{\mathrm{OX}} + (1-s)\overrightarrow{\mathrm{OE}}$$

(1) の結果および条件から　$\overrightarrow{\mathrm{OX}} = \dfrac{1-\ell}{2}\vec{a} + \ell\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\vec{c}$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OY}} &= s\left(\frac{1-\ell}{2}\vec{a} + \ell\vec{b}\right) + (1-s)\cdot 2\vec{c}\\ &= \frac{s(1-\ell)}{2}\vec{a} + s\ell\vec{b} + 2(1-s)\vec{c}\end{aligned}$$

Y は平面 α 上の点であるから

$$\frac{s(1-\ell)}{2} + s\ell + 2(1-s) = 1 \quad \text{ゆえに} \quad s = \frac{2}{3-\ell},\quad 1-s = \frac{1-\ell}{3-\ell}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OY}} = \frac{1-\ell}{3-\ell}\vec{a} + \frac{2\ell}{3-\ell}\vec{b} + \frac{2(1-\ell)}{3-\ell}\vec{c}}$$

(3) Y は直線 CF 上の点であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OY}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{OF}}$$

F は A，B の中点であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$

したがって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OY}} &= (1-t)\vec{c} + t\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\\ &= \frac{t}{2}\vec{a} + \frac{t}{2}\vec{b} + (1-t)\vec{c}\end{aligned}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから，(2) の結果と上式の係数を比較して

$$\frac{1-\ell}{3-\ell} = \frac{t}{2},\quad \frac{2\ell}{3-\ell} = \frac{t}{2},\quad \frac{2(1-\ell)}{3-\ell} = 1-t$$

上の第 1 式，第 2 式より，$\ell = \dfrac{1}{3}$，$t = \dfrac{1}{2}$．これは第 3 式を満たす．

よって　$\boldsymbol{\ell = \dfrac{1}{3}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ より　$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f(x)$ は $x = 1$ で極大値 0 をとるから

$$f(1) = 1 + a + b + c = 0, \quad f'(1) = 3 + 2a + b = 0$$

上の 2 式から　$\boldsymbol{a = c - 2,\ \ b = -2c + 1}$

(2) (1) の結果から　$f'(x) = 3x^2 + 2(c-2)x - 2c + 1$

$\qquad = (x-1)(3x + 2c - 1)$

$f'(x) = 0$ とすると　$x = 1,\ \dfrac{1-2c}{3}$

$x = 1$ で極大値をもつから　$1 < \dfrac{1-2c}{3}$　ゆえに　$c < -1$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{1-2c}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

よって　$\boldsymbol{c < -1}$

(3) (1) の結果から

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + (c-2)x^2 + (-2c+1)x + c \\ &= (x+c)(x-1)^2 \end{aligned}$$

曲線 $y = f(x)$ の x 軸との共有点の x 座標は　$x = -c,\ 1$

ここで　$\displaystyle\int_{-c}^{1} (x+c)(1-x)^2\,dx = \frac{1!2!}{4!}(1+c)^4 = \frac{1}{12}(c+1)^4$

$c + 1$ の符号に関係なく，求める面積を S とすると

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{12}(c+1)^4}$$

補足 積分公式[1]

$$\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m(\beta - x)^n\,dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}}$$

を利用する．

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．