平成 31 年度　熊本大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
理学部　平成 31 年 3 月 12 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\triangle$ABC において AB $=2$，BC $=3$，$\angle$ABC $=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく。

(1) 辺 AC の長さと，内積 $\vec{b}\cdot\vec{c}$ の値を求めよ。

(2) 辺 AB の中点を D，辺 AC の中点を E とする。実数 s，t に対して点 O を $\overrightarrow{\mathrm{AO}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ を満たす点とする。このとき内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EO}}$ の値を s と t を用いて表せ。

(3) 点 O を $\triangle$ABC の外心とするとき，(2) の s と t の値を求めよ。

(4) $\triangle$ABC の外接円上の点 F を，点 A，点 C と異なる点で $\angle$FAC $=\dfrac{\pi}{3}$ を満たすものとする。このとき $\overrightarrow{\mathrm{AF}}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $C: y=x^2-x+1$ のグラフは，原点を通り，傾きが正の直線 ℓ と点 P で接しているとする。

(1) 点 P の座標を求めよ。また直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 ℓ および y 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 6 種類の数字 0，1，2，3，4，5 を 4 個並べて 4 桁の整数を作る。ここで 0325 など先頭が 0 のものは 4 桁とは見なさない。

(1) 各桁の数字に重複を許すとき，4 桁の偶数は何通りできるか答えよ。

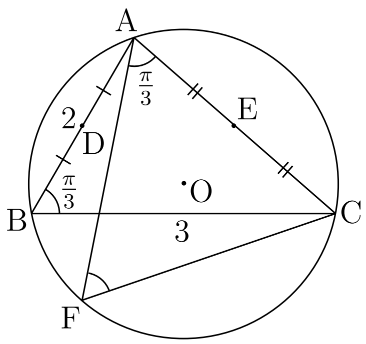
(2) 各桁の数字が相異なる 4 桁の偶数は何通りできるか答えよ。

(3) 各桁の数字に重複を許すとき，4 桁の 3 の倍数は何通りできるか答えよ。

(4) 各桁の数字が相異なる 4 桁の 3 の倍数は何通りできるか答えよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) $\triangle$ABC に余弦定理を適用すると



$$\mathrm{AC}^2 = 2^2 + 3^2 - 2\cdot2\cdot3\cos\frac{\pi}{3} = 7$$

よって　　$\mathbf{AC} = \boldsymbol{\sqrt{7}}$

$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = |\vec{c} - \vec{b}| = 3$ より

$$|\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + |\vec{b}|^2 = 9$$

$|\vec{b}| = 2$，$|\vec{c}| = \sqrt{7}$ であるから　$7 - 2\vec{b}\cdot\vec{c} + 4 = 9$　よって　$\boldsymbol{\vec{b}\cdot\vec{c} = 1}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AO}} = s\vec{b} + t\vec{c}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{DO}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AD}} = s\vec{b} + t\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} = \left(s - \frac{1}{2}\right)\vec{b} + t\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{EO}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}} = s\vec{b} + t\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{c} = s\vec{b} + \left(t - \frac{1}{2}\right)\vec{c}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{c}$ および (1) の結果に注意して

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}} = \left(s - \frac{1}{2}\right)|\vec{b}|^2 + t\vec{b}\cdot\vec{c} = \left(s - \frac{1}{2}\right)\cdot4 + t\cdot1 = \boldsymbol{4s + t - 2},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EO}} = s\vec{b}\cdot\vec{c} + \left(t - \frac{1}{2}\right)|\vec{c}|^2 = s\cdot1 + \left(t - \frac{1}{2}\right)\cdot7 = \boldsymbol{s + 7t - \frac{7}{2}}$$

(3) 点 O が外心であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{EO}}$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EO}} = 0$ となり，(2) の結果にこれを代入して

$$4s + t - 2 = 0,\quad s + 7t - \frac{7}{2} = 0\quad よって\quad \boldsymbol{s = \frac{7}{18},\ t = \frac{4}{9}}$$

(4) 弦 AC に対して，F が B と反対側の円周上にあるとき，$\angle\mathrm{AFC} = \frac{2}{3}\pi$ であるから，$\angle\mathrm{FAC} < \frac{\pi}{3}$ となり，条件に反する．したがって，F は弦 AC に対して B との同じ側の円周上にあり，円周角の定理により，$\angle\mathrm{AFC} = \angle\mathrm{ABC} = \frac{\pi}{3}$. $\angle\mathrm{FAC} = \frac{\pi}{3}$ であるから，$\triangle$AFC は正三角形となり，外心 O は，この三角形の重心でもある．したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AO}} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AF}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}})$

よって　　$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = 3\overrightarrow{\mathrm{AO}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 3\left(\frac{7}{18}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}\right) - \vec{c} = \boldsymbol{\frac{7}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 直線 ℓ の方程式を $y=kx$ とおく $(k>0)$．これと C の方程式から y を消去すると

$$x^2-x+1=kx \quad \text{ゆえに} \quad x^2-(k+1)x+1=0 \quad \cdots(*)$$

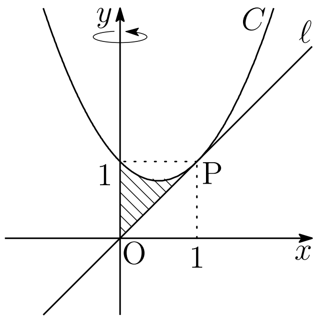
このとき，$(*)$ の係数について

$$(k+1)^2-4\cdot 1=0 \quad \text{ゆえに} \quad (k-1)(k+3)=0$$

$k>0$ に注意して　$k=1$　よって　$\boldsymbol{\ell : y=x}$

連立方程式 $\begin{cases} y=x^2-x+1 \\ y=x \end{cases}$ 　これを解いて　$\mathbf{P(1,\ 1)}$

(2) 求める回転体の体積 V は，右の図から



$$\frac{V}{2\pi}=\int_0^1 x\{(x^2-x+1)-x\}\,dx$$
$$=\int_0^1 x(1-x)^2\,dx=\frac{1}{12}$$

よって　$\boldsymbol{V=\dfrac{\pi}{6}}$

解説 バウムクーヘン型の求積法[1] および次の積分公式[2] を利用．

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

[1]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2016.pdf の $\boxed{4}$ を参照．
[2]http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/Qdai_tech_2010_kouki.pdf の $\boxed{1}$ を参照．

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1)

- 千の位は 0 以外の 5 通り．
- 百，十の位は 6^2 通り．
- 一の位は「0, 2, 4」の 3 通り．

よって　$5 \times 6^2 \times 3 = \mathbf{540}$ (通り)

(2) (i) 千の位が奇数のとき

① 千の位は「1, 3, 5」の 3 通り．

② 一の位は「0, 2, 4」の 3 通り．

③ 百，十の位は，①，② で決めた以外 ${}_4\mathrm{P}_2$ 通り．

(ii) 千の位が偶数のとき

④ 千の位は「2, 4」の 2 通り．

⑤ 一の位は 3 つの偶数から ④ で決めた以外の 2 通り．

⑥ 百，十の位は，④，⑤ で決めた以外の ${}_4\mathrm{P}_2$ 通り．

(i)，(ii) より　$3 \times 3 \times {}_4\mathrm{P}_2 + 2 \times 2 \times {}_4\mathrm{P}_2 = \mathbf{156}$ (通り)

(3) $\boxed{0} = \{0,\ 3\}$，$\boxed{+} = \{1,\ 4\}$，$\boxed{-} = \{2,\ 5\}$ とする．

(i) 千の位が $\boxed{+}$ のとき，他の位は次の数で構成される．

$$\{\boxed{-}, \boxed{0}, \boxed{0}\},\quad \{\boxed{+}, \boxed{+}, \boxed{0}\},\quad \{\boxed{+}, \boxed{-}, \boxed{-}\}$$

百，十，一の位の並びにより　$2^4 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times 3 = 144$ (通り)

(ii) 千の位が $\boxed{-}$ のとき，他の位は次の数で構成される．

$$\{\boxed{+}, \boxed{0}, \boxed{0}\},\quad \{\boxed{-}, \boxed{-}, \boxed{0}\},\quad \{\boxed{-}, \boxed{+}, \boxed{+}\}$$

百，十，一の位の並びにより　$2^4 \times {}_3\mathrm{C}_1 \times 3 = 144$ (通り)

(iii) 千の位が 3 のとき，他の位は次の数で構成される．

$$\{\boxed{0}, \boxed{0}, \boxed{0}\},\quad \{\boxed{+}, \boxed{+}, \boxed{+}\},\quad \{\boxed{-}, \boxed{-}, \boxed{-}\},$$
$$\{\boxed{+}, \boxed{-}, \boxed{0}\}$$

したがって　$2^3 \times 3 + 2^3 \cdot 3! = 72$ (通り)

(i)〜(iii) から　$144 + 144 + 72 = \mathbf{360}$ (通り)

(4) $\boxed{+} = \{1,\ 4\}$, $\boxed{-} = \{2,\ 5\}$ とする．

(i) 千の位が $\boxed{+}$ のとき，他の位は次の数で構成される．

$$\{\boxed{-},\ 0,\ 3\},\quad \{\boxed{+}, 2,\ 5\}$$

したがって　$2^2 \cdot 3! + 2! \cdot 3! = 36$

(ii) 千の位が $\boxed{-}$ のとき，他の位は次の数で構成される．

$$\{\boxed{+},\ 0,\ 3\},\quad \{\boxed{-}, 1,\ 4\}$$

したがって　$2^2 \cdot 3! + 2! \cdot 3! = 36$

(iii) 千の位が 3 のとき，他の位は次の数で構成される．

$$\{\boxed{+},\ \boxed{-},\ 0\}$$

したがって　$2^2 \cdot 3! = 24$

(i)〜(iii) より　$36 + 36 + 24 = \mathbf{96}$ 通り