平成30年度　熊本大学2次試験後期日程 (数学問題)
理学部　平成30年3月12日

$\boxed{1}$ 2つの整数 $n\,(n \geqq 1)$ と $k\,(0 \leqq k \leqq n)$ に対して二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ を考える。また

$$c_n = \frac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n$$

とおく。このとき以下の問いに答えよ。

(問1) 等式

$$c_n = {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}$$

を示せ。

(問2) $n \geqq 2$ に対して等式

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{4n-2}{n+1}$$

を示せ。

(問3) $(n+1)c_n$ は偶数であることを示せ。

(問4) 等式

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}{}_n\mathrm{C}_k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

を示せ。

$\boxed{2}$ 2つの袋がある。それぞれの袋の中には1から n までの番号が書かれた n 個 $(n \geqq 2)$ の球が入っている。A，B 2名がそれぞれの袋を使ってゲームを行い，得点の高い方を勝ちとする。ゲームのルールは次の通りである。

- A は袋から無作為に球を2個同時に取り出し，書かれている数の最大を得点とする。
- B は袋から無作為に球を1個取り出し，書かれている数を記録する。そして取り出した球を袋に戻し，再び同じ作業を行う。このとき記録した2つの数の最大を得点とする。

このとき以下の問いに答えよ。

(問1) A の得点の期待値を求めよ。

(問2) B が勝つ確率を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x) = (2x-1)e^{-x}$ について，以下の問いに答えよ。

(問 1) $f(x)$ の極値を求めよ。

(問 2) 2 つの直線 $y = m_1 x$ と $y = m_2 x$ がそれぞれ曲線 $y = f(x)$ に接するように実数 m_1，m_2 の値を求めよ。ただし，$m_1 < m_2$ とする。

(問 3) (問 2) で求めた m_1 に対し，y 軸と直線 $y = m_1 x$，および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) $${}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{n}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n$$

よって $${}_{2n}\mathrm{C}_n-{}_{2n}\mathrm{C}_{n-1}={}_{2n}\mathrm{C}_n-\frac{n}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n=\frac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n=c_n$$

(問 2) $$c_n=\frac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n \quad \cdots(*)$$

$${}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}=\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}=\frac{n^2}{2n(2n-1)}\cdot\frac{(2n)!}{n!n!}=\frac{n}{4n-2}{}_{2n}\mathrm{C}_n$$ より

$$\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}=\frac{4n-2}{n}$$

よって $$\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}\cdot\frac{n}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{{}_{2n-2}\mathrm{C}_{n-1}}$$
$$=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{4n-2}{n}=\frac{4n-2}{n+1}$$

(問 3) (問 1) の結果から　c_n は整数である．

(問 2) の結果から　$(n+1)c_n=(4n-2)c_{n-1}=2(2n-1)c_{n-1}$

よって，$(n+1)c_n$ は偶数である．

(問 4) $$\frac{1}{k+1}{}_n\mathrm{C}_k=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{1}{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$$

したがって $$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}{}_n\mathrm{C}_k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}{}_{n+1}\mathrm{C}_{k+1}$$
$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}{}_{n+1}\mathrm{C}_k-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

別解 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k=(1+x)^n$ より

$$\int_0^1\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k x^k\,dx=\int_0^1(1+x)^n\,dx$$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}{}_n\mathrm{C}_k\Big[\ x^{k+1}\ \Big]_0^1=\frac{1}{n+1}\Big[\ (1+x)^{n+1}\ \Big]_0^1$$
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}{}_n\mathrm{C}_k=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(問 1) A の得点を X とすると，その確率は $(k=1,2,\cdots,n)$

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{A}}(X \leqq k) &= \frac{{}_k\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_k} = \frac{k(k-1)}{n(n-1)},\\
P_{\mathrm{A}}(X = k) &= P_{\mathrm{A}}(X \leqq k) - P_{\mathrm{A}}(X \leqq k-1)\\
&= \frac{k(k-1)}{n(n-1)} - \frac{(k-1)(k-2)}{n(n-1)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

よって，求める期待値は

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} kP_{\mathrm{A}}(X=k) &= \frac{2}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\\
&= \frac{2}{3n(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\{(k+1)-(k-2)\}\\
&= \frac{2}{3n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)k(k+1)-(k-2)(k-1)k\}\\
&= \frac{2}{3n(n-1)}\cdot(n-1)n(n+1) = \boldsymbol{\frac{2(n+1)}{3}}
\end{aligned}
$$

(問 2) B の得点を Y とすると，その確率は $(k=1,2,\cdots,n)$

$$
\begin{aligned}
P_{\mathrm{B}}(Y \leqq k) &= \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{k^2}{n^2},\\
P_{\mathrm{B}}(Y > k) &= 1 - P_{\mathrm{B}}(Y \leqq k) = 1 - \frac{k^2}{n^2}
\end{aligned}
$$

求める確率を P とすると

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{k=1}^{n} P_{\mathrm{A}}(X=k)P_{\mathrm{B}}(Y>k) = \sum_{k=1}^{n} P_{\mathrm{A}}(X=k)\left(1-\frac{k^2}{n^2}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} P_{\mathrm{A}}(X=k) - \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k^2 P_{\mathrm{A}}(X=k)\\
&= 1 - \frac{2}{n^3(n-1)}\sum_{k=1}^{n} k^2(k-1)\\
&= 1 - \frac{2}{n^3(n-1)}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}\\
&= \boldsymbol{\frac{(n-2)(3n+1)}{6n^2}}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1) $f(x) = (2x-1)e^{-x}$ より　$f'(x) = (-2x+3)e^{-x}$

x	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$

よって　　極大値 $\boldsymbol{f\left(\frac{3}{2}\right) = 2e^{-\frac{3}{2}}}$

(問 2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y - (2t-1)e^{-t} = (-2t+3)e^{-t}(x-t)$$

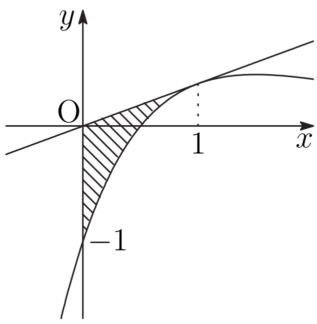
ゆえに　$y = (-2t+3)e^{-t}x + (t-1)(2t+1)e^{-t} \quad \cdots(*)$

接線 $(*)$ が原点を通るとき　$t = 1,\ -\dfrac{1}{2}$

このとき，$(*)$ の方程式は，それぞれ　$y = e^{-1}x$，$y = 4e^{\frac{1}{2}}x$

$e^{-1} < 4e^{\frac{1}{2}}$ であるから　　$\boldsymbol{m_1 = e^{-1},\ m_2 = 4e^{\frac{1}{2}}}$

(問 3) (2) の結果から，y 軸と直線 $y = e^{-1}x$，および曲線 $y = f(x)$ で囲まれた図形は，右の図の斜線部分である．よって，求める面積を S とすると



$$S = \int_0^1 \{e^{-1}x - (2x-1)e^{-x}\}\,dx$$

$$= \left[\ \frac{e^{-1}x^2}{2} + (2x+1)e^{-x}\ \right]_0^1 = \boldsymbol{\frac{7}{2e} - 1}$$