平成29年度　熊本大学2次試験後期日程(数学問題)
理学部　平成29年3月12日

$\boxed{\mathbf{1}}$ a，b，c は自然数で，$a > b > c$ とする。

$$A = (a-b)(a-c)(b-c), \quad B = (a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2)$$

(問1) A は偶数であることを示せ。

(問2) abc が3の倍数でないなら，A は6で割り切れることを示せ。

(問3) abc が3の倍数でないなら，B は54で割り切れることを示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ a_1 を負の数とする。数直線上で，a_1 と1の中点を a_2，a_2 と2との中点を a_3，以下同様に，a_n と n の中点を a_{n+1} $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする。以下の問いに答えよ。

(問1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を a_1 を用いて表せ。

(問2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を a_1 を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で定義された関数

$$f(x) = \int_0^\pi t|\sin(t-x)|\,dt$$

について，以下の問いに答えよ。

(問1) $f(x)$ を求めよ。

(問2) $f(x)$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で最大値を取り，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ の範囲で最小値を取ることを示せ。

(問3) $f(x)$ の最大値と最小値の和を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1)　(i)　$(a-b)(b-c) \equiv 0 \pmod 2$ のとき

$$(a-b)(a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 2$$

(ii)　$(a-b)(b-c) \equiv 1 \pmod 2$ のとき

$$a-b \equiv 1,\quad b-c \equiv 1 \pmod 2$$

ゆえに　$a-c = (a-b)+(b-c) \equiv 0 \pmod 2$

よって　$(a-b)(a-c)(b-c) \equiv 0 \pmod 2$

(i),(ii) より，A は偶数である．

(問 2)　abc は 3 の倍数でないから，a，b，c は，法 3 に関して，1 または -1 と合同．
ゆえに，$a-b$，$a-c$，$b-c$ の少なくとも 1 つは，法 3 に関して 0 と合同．
これと (問 1) の結果から，A は 6 で割りきれる．

(問 3)

$$\begin{aligned} B &= (a^2-b^2)(a^2-c^2)(b^2-c^2) \\ &= (a+b)(a-b)(a+c)(a-c)(b+c)(b-c) \\ &= A(a+b)(a+c)(b+c) \end{aligned}$$

B は A の倍数であるから，B は 2 で割り切れる．

abc は 3 の倍数でないから，a，b，c は，法 3 に関して，1 または -1 と合同．

したがって　$a^2 \equiv 1,\quad b^2 \equiv 1,\quad c^2 \equiv 1 \pmod 3$

ゆえに　$a^2-b^2 \equiv 0,\quad a^2-c^2 \equiv 0,\quad b^2-c^2 \equiv 0 \pmod 3$

これから，B は $3 \times 3 \times 3$ で割りきれ，2 でも割りきれる．

よって，B は 54 で割りきれる．

$\boxed{\mathbf{2}}$

(問 1) 数列 $\{a_n\}$ の漸化式は $\quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + n}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

これから $\quad a_{n+2} = \dfrac{a_{n+1} + n + 1}{2}$

上の 2 式の辺々の差をとると

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n) + \frac{1}{2}$$

$b_n = a_{n+1} - a_n \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるから

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad b_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(b_n - 1)$$

ここで，$a_2 = \dfrac{a_1 + 1}{2}$ より

$$b_1 = a_2 - a_1 = \frac{a_1 + 1}{2} - a_1 = \frac{1 - a_1}{2} \quad \cdots ①$$

数列 $\{b_n - 1\}$ は初項が $b_1 - 1$ で，公比が $\dfrac{1}{2}$ の等比数列であるから

$$b_n - 1 = (b_1 - 1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \cdots ②$$

① を ② に代入すると

$$b_n - 1 = \left(\frac{1 - a_1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b_n = 1 - \frac{1 + a_1}{2^n}}$$

(問 2) (問 1) の結果から $\quad a_{n+1} - a_n = 1 - \dfrac{1 + a_1}{2^n}$

$n \geqq 2$ のとき $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{1 + a_1}{2^k}\right)$

$$a_n - a_1 = n - 1 - (1 + a_1)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$a_n = n - 2 + \frac{1 + a_1}{2^{n-1}}$$

上式は $n = 1$ のときも成立するから

$$\boldsymbol{a_n = n - 2 + \frac{1 + a_1}{2^{n-1}}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1) $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} t|\sin(t-x)|\,dt \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$ より

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{x} t\{-\sin(t-x)\}\,dt + \int_x^{\pi} t\sin(t-x)\,dt \\
&= \Big[\ t\cos(t-x) - \sin(t-x)\Big]_0^x + \Big[-t\cos(t-x) + \sin(t-x)\ \Big]_x^{\pi} \\
&= \boldsymbol{2x + \pi\cos x}
\end{aligned}
$$

(問 2) (問 1) の結果から $\quad f'(x) = 2 - \pi\sin x$

$\sin\alpha = \dfrac{2}{\pi}\ \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$f(x)$ の増減表は

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\pi-\alpha$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	π	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$	π

よって，最大値 $f(\alpha)$，最小値 $f(\pi-\alpha)$ をとる $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2} < \pi - \alpha < \pi\right)$.

(問 3) (問 1),(問 2) の結果から

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) + f(\pi-\alpha) &= 2\alpha + \pi\cos\alpha + 2(\pi-\alpha) + \pi\cos(\pi-\alpha) \\
&= \boldsymbol{2\pi}
\end{aligned}
$$