平成28年度　熊本大学2次試験後期日程 (数学問題)
理学部　平成28年3月12日

1 1辺の長さが1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とする。また，3点O，A，Bを通る平面を$\alpha$とし，3点A，B，Cを通る平面を$\beta$とする。$s$，$t$を実数とし，平面$\alpha$上の点Pの位置ベクトルを$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$と表す。点Pを通り平面を$\alpha$に垂直な直線と平面$\beta$との交点をHとする。以下の問いに答えよ。

(問1) 内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}$，$\vec{c}\cdot\vec{a}$を求めよ。

(問2) 点Hの位置ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$を$s$，$t$，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

2 αを実数とし，$f(x)=\alpha\sin x$，$g(x)=\sin 3x$とおく。2曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$が，$0<x<\pi$において異なる2点で交わるとき，以下の問いに答えよ。

(問1) αの範囲を求めよ。

(問2) αが(問1)で求めた範囲にあるとき，

$$S=\int_0^\pi |\,f(x)-g(x)\,|\,dx$$

をαを用いて表せ。

(問3) αが(問1)で求めた範囲を動くとき，αの関数であるSの最小値を求めよ。

3 2つの関数$f(x)$と$g(x)$は微分可能で

$$f(x)=2e^{-x}+\int_0^\pi g'(t)\,dt$$
$$g(x)=\cos x+\int_0^x tf(t)\,dt$$

を満たすとする。ただし，$g'(t)$は$g(t)$の導関数である。

$$k=\int_0^\pi g'(t)\,dt$$

とおくとき，以下の問いに答えよ。

(問1) kを求めよ。

(問2) $f(x)$および$g(x)$を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cos60^\circ=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(問 2) $\triangle$OAB の重心を G とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}),\qquad \overrightarrow{\mathrm{GC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(3\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})$$

平面 α の法線ベクトルを $\vec{n}=3\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$ とすると，実数 k を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OH}}&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\vec{n}\\&=s\vec{a}+t\vec{b}+k(3\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})\\&=(s-k)\vec{a}+(t-k)\vec{b}+3k\vec{c}\end{aligned}$$

点 H が平面 β 上にあるとき

$$(s-k)+(t-k)+3k=1\quad\text{ゆえに}\quad k=1-s-t$$

よって $\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(2s+t-1)\vec{a}+(s+2t-1)\vec{b}+3(1-s-t)\vec{c}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(問 1) $f(x)=\alpha\sin x$，$g(x)=\sin3x$ より

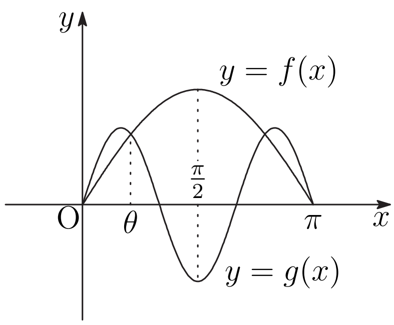
$$\begin{aligned}f(x)-g(x)&=\alpha\sin x-\sin3x=\alpha\sin x-(3\sin x-4\sin^3x)\\&=4\sin^3x-(3-\alpha)\sin x\\&=4\sin x\left(\sin^2x-\frac{3-\alpha}{4}\right)\end{aligned}$$

2 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が $0<x<\pi$ において異なる 2 点で交わるとき

$$0<\frac{3-\alpha}{4}<1\quad\text{すなわち}\quad \boldsymbol{-1<\alpha<3}$$

(問 2) $f(\pi-x)=f(x)$，$g(\pi-x)=g(x)$ であるから，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ はともに直線 $x=\frac{\pi}{2}$ に関して対称である．$0<x<\frac{\pi}{2}$ における $f(x)=g(x)$ の解を θ とすると

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3-\alpha}}{2}$$



$h(x)=f(x)-g(x)$ とし，$h(x)$ の原始関数の 1 つを

$$H(x)=\frac{1}{3}\cos 3x-\alpha\cos x$$

とおくと，求める面積 S は

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\,h(x)\,|\,dx=-\int_0^{\theta}h(x)\,dx+\int_{\theta}^{\frac{\pi}{2}}h(x)\,dx\\&=H(0)+H\left(\frac{\pi}{2}\right)-2H(\theta)\\&=\left(\frac{1}{3}-\alpha\right)+0-2\left(\frac{1}{3}\cos 3\theta-\alpha\cos\theta\right)\\&=\frac{1}{3}-\alpha-\frac{2}{3}\cos 3\theta+2\alpha\cos\theta\quad\cdots①\end{aligned}$$

ここで　$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\dfrac{\sqrt{1+\alpha}}{2}$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta&=4\cos^3\theta-3\cos\theta=\cos\theta(4\cos^2\theta-3)\\&=\frac{\sqrt{1+\alpha}}{2}\left(4\times\frac{1+\alpha}{4}-3\right)=\frac{(\alpha-2)\sqrt{1+\alpha}}{2}\end{aligned}$$

これらを ① に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{S}{2}&=\frac{1}{3}-\alpha-\frac{2}{3}\times\frac{(\alpha-2)\sqrt{1+\alpha}}{2}+2\alpha\times\frac{\sqrt{1+\alpha}}{2}\\&=\frac{2}{3}(1+\alpha)^{\frac{3}{2}}-\alpha+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

よって　$\boldsymbol{S=\frac{4}{3}(1+\alpha)^{\frac{3}{2}}-2\alpha+\frac{2}{3}}$

(問 3) $\dfrac{dS}{d\alpha}=2\sqrt{1+\alpha}-2=2(\sqrt{1+\alpha}-1)$

(問 1) で求めた α の範囲における増減表は

α	(-1)	$\cdots$	0	$\cdots$	(3)
$\frac{dS}{d\alpha}$		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	2	$\nearrow$	

よって　S は $\alpha=0$ のとき，最小値 **2** をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1) $$f(x) = 2e^{-x} + \int_0^{\pi} g'(t)\,dt \quad \cdots ①$$

$$g(x) = \cos x + \int_0^{x} tf(t)\,dt \quad \cdots ②$$

とおき，$k = \displaystyle\int_0^{\pi} g'(t)\,dt$ を ① に代入すると　$f(x) = 2e^{-x} + k \quad \cdots ③$

② を微分すると　$g'(x) = -\sin x + xf(x) = -\sin x + x(2e^{-x} + k)$

したがって
$$\begin{aligned} k &= \int_0^{\pi} \{-\sin t + t(2e^{-t} + k)\}\,dt \\ &= \left[\ \cos t - 2e^{-t}(t+1) + \frac{kt^2}{2}\ \right]_0^{\pi} \\ &= -2e^{-\pi}(\pi+1) + \frac{k\pi^2}{2} \end{aligned}$$

ゆえに　$\left(\dfrac{\pi^2}{2} - 1\right)k = 2(\pi+1)e^{-\pi}$　よって　$\boldsymbol{k = \dfrac{4(\pi+1)e^{-\pi}}{\pi^2 - 2}}$

(問 2) ③ に (問 1) の結果を代入すると　$\boldsymbol{f(x) = 2e^{-x} + \dfrac{4(\pi+1)e^{-\pi}}{\pi^2 - 2}}$

また
$$\begin{aligned} \int_0^{x} tf(t)\,dt &= \int_0^{x} t(2e^{-t} + k)\,dt \\ &= \left[-2e^{-t}(t+1) + \frac{kt^2}{2}\right]_0^{x} \\ &= -2(x+1)e^{-x} + 2 + \frac{kx^2}{2} \end{aligned}$$

よって
$$\begin{aligned} g(x) &= \cos x + \int_0^{x} tf(t)\,dt \\ &= \cos x - 2(x+1)e^{-x} + 2 + \frac{kx^2}{2} \\ &= \boldsymbol{\cos x - 2(x+1)e^{-x} + 2 + \frac{2(\pi+1)e^{-\pi}x^2}{\pi^2 - 2}} \end{aligned}$$