平成 27 年度　熊本大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
理学部　平成 27 年 3 月 12 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ a，m を定数とし，放物線 $C : y = x^2 - ax$ 上の点 $\mathrm{P}(u,\ u^2 - au)$ を通る傾き m の直線を l とする。l と C のもう 1 つの交点を Q，線分 PQ の中点を M とする。ただし，l が点 P で C に接するときは，Q と M は点 P に一致するものとする。以下の問いに答えよ。

(問 1) 点 M の x 座標を a，m を用いて表せ。

(問 2) 点 P が C 上を動くとき，原点 O と点 M の間の距離 OM の最小値を a，m を用いて表せ。

(問 3) $a + m = 2$ のとき，距離 OM の最小値が 2 となるのような a，m の組を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 以下の問いに答えよ。

(問 1) 次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = 4,\quad a_{n+1} = 4a_n - 6 \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(問 2) 数列 $\{b_n\}$ を次で定める。

$$b_1 = 16,\quad b_{n+1} = \frac{{b_n}^4}{2^6} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(i) 一般項 b_n を求めよ。

(ii) $b_n > 1000$ を満たす n の範囲を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ a を $a > 1$ なる定数とし，$1 \leqq x \leqq a$ を満たす x に対して

$$f(x) = \int_1^a \left|\log \frac{x}{t}\right| dt$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(問 1) $f(x)$ を求めよ。

(問 2) $f(x)$ の $1 \leqq x \leqq a$ における最小値を a を用いて表せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) l は点 $\mathrm{P}(u,\ u^2-au)$ を通り，傾き m の直線であるから

$$y=m(x-u)+u^2-au$$

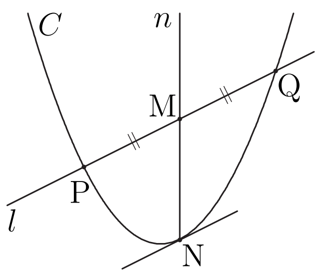
上式と $C: y=x^2-ax$ から y を消去すると

$$x^2-ax=m(x-u)+u^2-au \quad ゆえに \quad (x-u)(x+u-a-m)=0$$

したがって，2 点 P，Q の交点の x 座標は　　$x=u, -u+a+m$
よって，2 点 P，Q の中点 M の x 座標は

$$x=\frac{u+(-u+a+m)}{2}=\boldsymbol{\frac{a+m}{2}}$$

(問 2) $x=\dfrac{a+m}{2}$ における C 上の点を N とすると



$$\begin{aligned}y&=\left(\frac{a+m}{2}\right)^2-a\cdot\frac{a+m}{2}\\&=\frac{a+m}{2}\left(\frac{a+m}{2}-a\right)=\frac{m^2-a^2}{4}\end{aligned}$$

したがって　　$\mathrm{N}\left(\dfrac{a+m}{2},\ \dfrac{m^2-a^2}{4}\right)$

M の描く軌跡は，N を端点とする半直線

$$x=\frac{a+m}{2} \quad \left(y \geqq \frac{m^2-a^2}{4}\right)$$

したがって，OM の最小値を L とすると，次の 2 つの場合がある．

i) $\dfrac{m^2-a^2}{4} \leqq 0$，すなわち，$|m| \leqq |a|$ のとき

$$L=\left|\frac{a+m}{2}\right|=\boldsymbol{\frac{|a+m|}{2}}$$

ii) $\dfrac{m^2-a^2}{4} > 0$，すなわち，$|m| > |a|$ のとき

$$L=\mathrm{ON}=\sqrt{\left(\frac{a+m}{2}\right)^2+\left(\frac{m^2-a^2}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{|a+m|}{4}\sqrt{4+(m-a)^2}}$$

(問 3) $a+m=2$ のとき，$L=2$ となるのは，ii) の場合であるから

$$\frac{|a+m|}{4}\sqrt{4+(m-a)^2}=2 \quad ゆえに \quad m-a=\pm 2\sqrt{3}$$

したがって　　$m=1\pm\sqrt{3},\ a=1\mp\sqrt{3}$　(複号同順)

このとき，$|m|>|a|$ に注意して　$\boldsymbol{a=1-\sqrt{3},\ m=1+\sqrt{3}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(問 1) $a_{n+1}=4a_n-6$ より　$a_{n+1}-2=4(a_n-2)$
数列 $\{a_n-2\}$ は，初項 $a_1-2=2$，公比 4 の等比数列であるから

$$a_n-2=(a_1-2)\cdot 4^{n-1} \quad よって \quad \boldsymbol{a_n=2(4^{n-1}+1)}$$

(問 2)　(i) $b_1=16$，$b_{n+1}=\dfrac{{b_n}^4}{2^6}$　$(n=1,2,3,\cdots)$

上の漸化式から　　$b_n>0$　$(n=1,2,3,\cdots)$

この漸化式を底を 2 とする対数をとると

$$\log_2 b_1=4,\quad \log_2 b_{n+1}=4\log_2 b_n-6$$

$a_n=\log_2 b_n$ となるから，(問 1) の結果を用いて

$$\log_2 b_n=2(4^{n-1}+1) \quad よって \quad \boldsymbol{b_n=2^{2(4^{n-1}+1)}}$$

(ii) (i) の結果から，b_n は，単調増加列である．

$$b_1=2^4=16,\quad b_2=2^{10}=1024$$

よって，$b_n>1000$ を満たす n の範囲は　$\boldsymbol{n\geqq 2}$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1) $g(t) = \log \dfrac{x}{t}$ とするとき

$$1 \leqq t \leqq x \text{ のとき} \quad g(t) \geqq 0, \quad x \leqq t \leqq a \text{ のとき} \quad g(t) \leqq 0$$

$g(t)$ の原始関数の 1 つを

$$G(t) = t\left(\log \frac{x}{t} + 1\right)$$

とおくと

$$G(x) = x,\ G(1) = \log x + 1,\ G(a) = a\left(\log \frac{x}{a} + 1\right)$$

したがって

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_1^a |\, g(t) \,|\, dt = \int_1^x g(t)\, dt - \int_x^a g(t)\, dt \\
&= \Big[\ G(t)\ \Big]_1^x - \Big[\ G(t)\ \Big]_x^a = 2G(x) - G(1) - G(a) \\
&= 2x - (\log x + 1) - a\left(\log \frac{x}{a} + 1\right) \\
&= \boldsymbol{2x - (a+1)\log x + a\log a - a - 1}
\end{aligned}$$

(問 2) $f(x)$ を微分すると $\quad f'(x) = 2 - \dfrac{a+1}{x} = \dfrac{2x-(a+1)}{x}$

増減表は，次のようになる．

x	1	$\cdots$	$\frac{a+1}{2}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	極小	$\nearrow$	

よって，求める最小値は

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+1}{2}\right) &= 2\cdot\frac{a+1}{2} - (a+1)\log\frac{a+1}{2} + a\log a - a - 1 \\
&= \boldsymbol{a\log a - (a+1)\log\frac{a+1}{2}}
\end{aligned}$$