平成 26 年度　熊本大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
理学部　平成 26 年 3 月 12 日

1 楕円 $x^2+2y^2=1$ を C_1 とし，放物線 $y=x^2$ を C_2 とする。

(問 1) C_1 と C_2 との交点の座標をすべて求めよ。

(問 2) (問 1) で求めた点のうち，第一象限にあるものを A とし，点 A で C_1 に接する直線を l とする。l と C_2 との交点のうち，A とは異なるものを B とするとき，B の座標を求めよ。

(問 3) l と C_2 が囲む部分を D とする。D が C_1 によって分けられる 2 つの部分のうち，点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を含まない方の図形の面積を求めよ。

2 a，b，c，d を実数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ は，

$$A^2+2E=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}A$$

を満たすとする。ただし，$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(問 1) $ad-bc=0$ でないことを示せ。

(問 2) $d=2$ のとき，A を求めよ。

3 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\cos^n x\,dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

で定義する。

(問 1) a_{n+2} を a_n を用いて表せ。

(問 2) a_n の一般項を求めよ。

(問 3) 不等式

$$a_{n+1}\leqq a_n \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

が成り立つことを示せ。

(問 4) 極限値

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot\cdots(2n-3)\cdot(2n-1)}\right)^2$$

を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) $x^2+2y^2=1\cdots$①，$y=x^2\cdots$② から x^2 を消去すると

$$y+2y^2=1 \quad \text{ゆえに} \quad (y+1)(2y-1)=0$$

② から $y \geqq 0$ に注意して　$y=\dfrac{1}{2}$

これを ② に代入して　$x^2=\dfrac{1}{2}$　ゆえに　$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，求める交点は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right),\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right)}$

(問 2) (問 1) の結果から，x 座標に注意して　$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{2}\right)$

C_1 上の点 A における接線の方程式は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x+2\cdot\frac{1}{2}y=1 \quad \text{すなわち} \quad y=-\frac{x}{\sqrt{2}}+1 \quad \cdots③$$

②，③ から y を消去すると

$$x^2=-\frac{x}{\sqrt{2}}+1 \quad \text{ゆえに} \quad (x+\sqrt{2})(\sqrt{2}x-1)=0$$

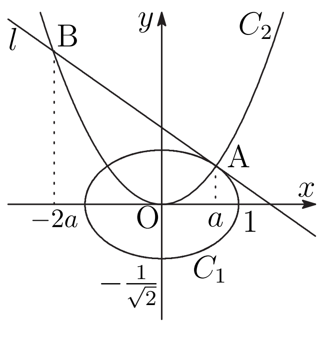
B は A と異なる点であるから，B の x 座標は　$x=-\sqrt{2}$

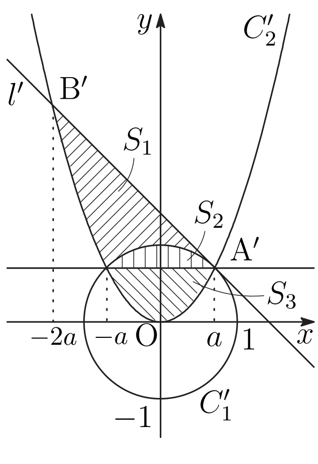
これを ② に代入して　$\mathrm{B}\boldsymbol{\left(-\sqrt{2},\ 2\right)}$

(問 3) $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ とおくと，2 点 A，B の x 座標は，それぞれ a，$-2a$.

C_1，C_2，l を x 軸を元に y 軸方向に $\sqrt{2}$ だけ拡大したものを，それぞれ C_1'，C_2'，l' とする．このとき 2 点 A，B はそれぞれ A$'$，B$'$ に移るとする．

また，(問 1) の結果から　$\mathrm{A}'\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$





$C_2' : y = \dfrac{x^2}{a}$ とおけるから，図の 3 つの面積 S_1，S_2，S_3 は

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= \frac{1}{6a}\{a - (-2a)\}^3 = \frac{9}{2}a^2 = \frac{9}{4} \\ S_2 &= \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \\ S_3 &= \frac{1}{6a}\{a - (-a)\}^3 = \frac{4}{3}a^2 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

したがって　$S_1 = (S_1 + S_2 + S_3) - S_2 - S_3$

$$= \frac{9}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{3} = \frac{25 - 3\pi}{12}$$

求める面積を S とすると，$S_1 = \sqrt{2}S$ であるから

$$S = \frac{S_1}{\sqrt{2}} = \frac{25 - 3\pi}{12\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{(25 - 3\pi)\sqrt{2}}{24}}$$

$\boxed{\textbf{2}}$

(問 1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ にハミルトン・ケーリーの定理を適用すると

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E = O$$

$B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ とおくと，条件式から

$$A^2 + 2E = BA$$

上の 2 式から A^2 を消去すると

$$(a + d)A - (ad - bc)E + 2E = BA$$

ゆえに　$$\{(a + d)E - B\}A = (ad - bc - 2)E \quad \cdots (*)$$

$ad - bc = 0$ と仮定すると，$(*)$ より

$$-\frac{1}{2}\{(a + d)E - B\}A = E$$

このとき，A は正則となり，仮定に反する．よって，$ad - bc \neq 0$.

(問 2) A は正則であるから，$(*)$ の両辺に右側から A^{-1} を掛けると

$$(a+d)E-B=(ad-bc-2)A^{-1}$$

すなわち $\begin{pmatrix} a+d-5 & 1 \\ 1 & a+d-4 \end{pmatrix} = \dfrac{ad-bc-2}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$d=2$ および $k=\dfrac{ad-bc-2}{ad-bc}\cdots$ ① とおいて，上式に代入すると

$$\begin{pmatrix} a-3 & 1 \\ 1 & a-2 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 2 & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \cdots(**)$$

上式の (1,1) 成分および (2,2) 成分から

$$a-3=2k,\quad a-2=ka$$

上の 2 式から a を消去して整理すると

$$2k^2+k-1=0 \quad \text{ゆえに} \quad (k+1)(2k-1)=0$$

$(**)$ より　$k=-1$ のとき　$a=1$，$b=c=1$

$k=\dfrac{1}{2}$ のとき　$a=4$，$b=c=-2$

このとき，a，b，c，d，k の値は ① を満たす.

よって　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-2} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1) $a_n = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n x\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$ により

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{n+2} x\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin x)' \cos^{n+1} x\,dx \\ &= \Big[\ \sin x \cos^{n+1} x\ \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x (\cos^{n+1} x)'\,dx \\ &= (n+1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 x \cos^n x\,dx \\ &= (n+1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (1 - \cos^2 x) \cos^n x\,dx \\ &= (n+1) a_n - (n+1) a_{n+2} \end{aligned}$$

よって $\qquad \boldsymbol{a_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} a_n}$

(問 2) $\qquad a_0 = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} dx = \frac{\pi}{2}, \quad a_1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\,dx = \Big[\ \sin x\ \Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = 1$

n が偶数のとき，$a_n = \dfrac{n(n-1)}{n^2} a_{n-2}$ より

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{(n-2)(n-3)}{(n-2)^2} \cdots \frac{2\cdot 1}{2^2} a_0 \\ &= \frac{n!}{2^n \left\{ \left(\dfrac{n}{2} \right)! \right\}^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi n!}{2^{n+1} \left\{ \left(\dfrac{n}{2} \right)! \right\}^2}} \end{aligned}$$

n が奇数のとき，$a_n = \dfrac{(n-1)^2}{n(n-1)} a_{n-2}$ より

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(n-1)^2}{n(n-1)} \cdot \frac{(n-3)^2}{(n-2)(n-3)} \cdots \frac{2^2}{3\cdot 2} a_1 \\ &= \frac{2^{n-1} \left\{ \left(\dfrac{n-1}{2} \right)! \right\}^2}{n!} \cdot 1 = \boldsymbol{\frac{2^{n-1} \left\{ \left(\dfrac{n-1}{2} \right)! \right\}^2}{n!}} \end{aligned}$$

(問 3) $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq 0$ のとき　$0 \leqq \cos x \leqq 1$　　ゆえに　$\cos^{n+1} x \leqq \cos^n x$

したがって　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^{n+1} x\,dx \leqq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n x\,dx$　よって　$a_{n+1} \leqq a_n$

(問 4) (1) のより，$a_{2n} = \dfrac{2n-1}{2n} a_{2n-2}$ であるから

$$a_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}a_0 = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

ゆえに　$\dfrac{2\cdot 4\cdot\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)} = \dfrac{1}{a_{2n}}\cdot\dfrac{\pi}{2}$　$\cdots$①

同様に，$a_{2n-1} = \dfrac{2n-2}{2n-1} a_{2n-3}$ であるから

$$a_{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\frac{4}{5}\frac{2}{3}a_1 = \frac{(2n-2)(2n-4)\cdots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3}$$

ゆえに　$\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{2\cdot 4\cdot\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)} = 2a_{2n-1}$　$\cdots$②

①，② の辺々を掛けると

$$\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)}\right)^2 = \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}}\pi$$

$a_{2n} > 0$，$a_{2n} < a_{2n-1} < a_{2n-2}$，$a_{2n-2} = \dfrac{2n}{2n-1}a_{2n}$ であるから

$$1 < \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} < \frac{2n}{2n-1}$$

したがって　$\pi < \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)}\right)^2 < \dfrac{2n\pi}{2n-1}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n\pi}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{1-\dfrac{1}{2n}} = \pi$ であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2\cdot 4\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n-3)(2n-1)}\right)^2 = \boldsymbol{\pi}$$