平成25年度　熊本大学2次試験後期日程(数学問題)
理学部　平成25年3月12日

$\boxed{\mathbf{1}}$ aを実数とし，行列 $A = \begin{pmatrix} 1-2a & -2a \\ 3a & 2a-1 \end{pmatrix}$ を考える。自然数 n について，$E + A + A^2 + \cdots + A^{2n-1} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とする。ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。

(問1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n$ および $\displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n$ が存在するための必要十分条件を求めよ。

(問2) (問1)の条件が満たされるとき，$B = \begin{pmatrix} \displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n & \displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} c_n & \displaystyle\lim_{n\to\infty} d_n \end{pmatrix}$ とする。$AB = BA$ であることを示せ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ aを実数とし，平面上の点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}\right)$ を考える。放物線 $C : y = -x^2$ の接線で点Aを通るもののうち，傾きの大きい方を l，小さいを方を m とする。以下の問いに答えよ。

(問1) l，m の傾きを a で表せ。

(問2) l と C の接点と，m と C の接点を通る直線を n とするとき，n の傾きを a で表せ。

(問3) l と n が直交するとき，実数 a を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x)$ および $g(x)$ は実数全体で定義された連続関数で

$$f(x) = 1 + \int_0^x g(t)\,dt, \quad g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(問1) $f(x)^2 - g(x)^2$ が定数であることを示し，その値を求めよ。

(問2) すべての実数 x に対して $f(x) \geqq 1$ が成り立つことを示せ。

(問3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ および $\displaystyle\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ を示せ。

(問4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 1-2a & -2a \\ 3a & 2a-1 \end{pmatrix}$ にハミルトン・ケリーの定理を適用すると

$$A^2 + (2a^2+4a-1)E = O \quad ゆえに \quad A^2 = (-2a^2-4a+1)E$$

$r = -2a^2-4a+1$ とおくと，$A^2 = rE$ であるから

$$\begin{aligned} E + A + A^2 + \cdots + A^{2n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1}(A^{2k} + A^{2k+1}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}(A^2)^k(E+A) = \sum_{k=0}^{n-1} r^k(E+A) \end{aligned}$$

$E + A = \begin{pmatrix} 2-2a & -2a \\ 3a & 2a \end{pmatrix}$ であるから，上の行列のすべての成分が収束するための必要十分条件は　$-1 < r < 1$

したがって　　$-1 < -2a^2 - 4a + 1 < 1$

よって　　$\boldsymbol{-1-\sqrt{2} < a < -2,\ 0 < a < -1+\sqrt{2}}$

(問 2) $-1 < r < 1$ のとき　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} r^k = \frac{1}{1-r}$　　ゆえに　$B = \dfrac{1}{1-r}(E+A)$

したがって　　$AB = \dfrac{1}{1-r}A(E+A) = \dfrac{1}{1-r}(A+A^2)$

$$BA = \frac{1}{1-r}(E+A)A = \frac{1}{1-r}(A+A^2)$$

よって　　$AB = BA$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(問 1) $C : y = -x^2$ より　$y' = -2x$

C 上の点 $(t, -t^2)$ における接線の方程式は

$$y + t^2 = -2t(x - t) \quad \text{すなわち} \quad y = -2tx + t^2$$

これが点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき

$$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2} = -2ta + t^2 \quad \text{ゆえに} \quad t^2 - 2at - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2} = 0$$

これを t について解くと　$t = a \pm \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}}$

これらの接点の x 座標を

$$\alpha = a - \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}}, \quad \beta = a + \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}}$$

とおくと $(\alpha < \beta)$，それぞれの接線の傾きは -2α，-2β であるから

$$-2\alpha > -2\beta$$

よって　l の傾きは　$-2\alpha = \boldsymbol{-2a + \sqrt{4a^2 + 2a + 2}}$,

m の傾きは　$-2\beta = \boldsymbol{-2a - \sqrt{4a^2 + 2a + 2}}$

(問 2) n は 2 点 $(\alpha, -\alpha^2)$，$(\beta, -\beta^2)$ を通る直線の傾きであるから

$$\frac{-\beta^2 + \alpha^2}{\beta - \alpha} = -(\alpha + \beta) = \boldsymbol{-2a}$$

補足 放物線 $C : x^2 = 4py$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ におけるそれぞれの接線の方程式は

$$2p(y + y_1) = x_1 x, \quad 2p(y + y_2) = x_2 x$$

この 2 直線の交点の座標を $\mathrm{N}(a,\ b)$ とすると

$$2p(b + y_1) = x_1 a, \quad 2p(b + y_2) = x_2 a$$

このことから，直線 $n : 2p(y + b) = ax$ は，2 点 A，B を通る．

このとき，この直線 n を，N を**極**とする C の**極線**という．

本題では，$4p = -1$，極の x 座標 a より，極線の傾きは $-2a$

(問 3) l と n が直交するから

$$(-2a+\sqrt{4a^2+2a+2})\cdot(-2a)=-1$$

したがって $$\sqrt{4a^2+2a+2}=2a+\frac{1}{2a} \quad \cdots ①$$

上式の両辺を平方すると

$$4a^2+2a+2=4a^2+2+\frac{1}{4a^2} \quad \text{ゆえに} \quad 2a=\frac{1}{4a^2}$$

① より，$a>0$ であることに注意してこれを解くと $\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1) $$f(x)=1+\int_0^x g(t)\,dt, \qquad g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

上の 2 式より，$f(0)=1$，$g(0)=0\cdots(*)$．また，上の 2 式を微分すると

$$f'(x)=g(x), \quad g'(x)=f(x) \qquad \cdots(**)$$

$(**)$ の辺々を加えると

$$\{f(x)+g(x)\}'=f(x)+g(x)$$
$$\{f(x)+g(x)\}'e^{-x}-\{f(x)+g(x)\}e^{-x}=0$$

積分すると $\{f(x)+g(x)\}e^{-x}=C_1$ (C_1は積分定数)

$(*)$ により，$C_1=1$ であるから $f(x)+g(x)=e^x \quad \cdots ①$

同様に，$(**)$ の辺々の差をとると

$$\{f(x)-g(x)\}'=-\{f(x)-g(x)\}$$
$$\{f(x)-g(x)\}'e^{x}+\{f(x)-g(x)\}e^{x}=0$$

積分すると $\{f(x)-g(x)\}e^{x}=C_2$ (C_2は積分定数)

$(*)$ により，$C_2=1$ であるから $f(x)-g(x)=e^{-x} \quad \cdots ②$

①，② の辺々を掛けると $f(x)^2-g(x)^2=\mathbf{1}$

(問 2) ①，② より $\quad f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \cdots$③

よって $\quad f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2}{2} + 1 \geqq 1$

(問 3) ①，② より $\quad g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cdots$④

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \infty$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \infty$$

(問 4) ③，④ より

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} = \mathbf{1}$$