平成 24 年度　熊本大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
理学部　平成 24 年 3 月 12 日

1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ とし，$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ によって数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，$\{d_n\}$ を定める。

(問 1) すべての自然数 n について，$c_n = 0$ が成り立つことを示せ。

(問 2) すべての自然数 n について，$a_n + b_n = d_n$ が成り立つことを示せ。

(問 3) 数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{d_n\}$ の一般項を求めよ。

2 平面上の円 C および放物線 D を

$$C : x^2 + y^2 = 1, \quad D : y = x^2 + 5$$

で定める。点 $\mathrm{P}(a,\ a^2 + 5)$ における D の接線を l とする。

(問 1) l の方程式を求めよ。

(問 2) l が C と異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

3 $f(x)$ を実数全体で定義された連続関数で，すべての実数 x に対して $f(x) > 0$ を満たすとする。

$$g(x) = \int_0^x (x - t)^2 f(t)\, dt$$

とおく。

(問 1) $g(x)$ の第 3 次導関数 $g'''(x)$ を求めよ。

(問 2) 関数 $y = g(x)$ のグラフは，$x < 0$ では上に凸，$x > 0$ では下に凸であることを示せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) $A^{n+1} = AA^n = A^nA$ により

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ゆえに

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + c_n & 2b_n + d_n \\ 3c_n & 3d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n & a_n + 3b_n \\ 2c_n & c_n + 3d_n \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + c_n = 2a_n & \cdots ① \\ b_{n+1} = 2b_n + d_n = a_n + 3b_n & \cdots ② \\ c_{n+1} = 3c_n = 2c_n & \cdots ③ \\ d_{n+1} = 3d_n = c_n + 3d_n & \cdots ④ \end{cases}$$

③ より　$3c_n = 2c_n$　ゆえに　$c_n = 0$

よって，すべての自然数 n について，$c_n = 0$ が成り立つ．

(問 2) ② より　$2b_n + d_n = a_n + 3b_n$　ゆえに　$d_n = a_n + b_n$

よって，すべての自然数 n について，$d_n = a_n + b_n$ が成り立つ．

(問 3) ①，④ より　$a_{n+1} = 2a_n$，　$d_{n+1} = 3d_n$

また，$a_1 = 2$，$d_1 = 3$ であるから，数列 $\{a_n\}$ は初項が 2，公比が 2 の等比数列であり，数列 $\{d_n\}$ は初項が 3，公比が 3 の等比数列であるから

$$a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = \boldsymbol{2^n}, \quad d_n = 3 \cdot 3^{n-1} = \boldsymbol{3^n}$$

これらを問 2 の結果に代入すると

$$3^n = 2^n + b_n \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{b_n = 3^n - 2^n}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(問 1) $y = x^2 + 5$ を微分すると　$y' = 2x$

したがって，l の方程式は

$$y - (a^2 + 5) = 2a(x - a) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{2ax - y - a^2 + 5 = 0}$$

(問 2) C の半径 r は　$r = 1$

C の中心 $(0,\ 0)$ と直線 l の距離 d は

$$d = \frac{|-a^2 + 5|}{\sqrt{(2a)^2 + (-1)^2}} = \frac{|a^2 - 5|}{\sqrt{4a^2 + 1}}$$

l が C と異なる 2 点で交わるとき，$d < r$ であるから

$$\frac{|a^2 - 5|}{\sqrt{4a^2 + 1}} < 1 \quad \text{ゆえに} \quad (a^2 - 5)^2 < 4a^2 + 1$$

整理すると　$a^4 - 14a^2 + 24 < 0$

$(a^2 - 2)(a^2 - 12) < 0$

ゆえに　$2 < a^2 < 12$

よって　$\boldsymbol{-2\sqrt{3} < a < -\sqrt{2},\ \sqrt{2} < a < 2\sqrt{3}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1) $g(x) = \displaystyle\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt$ より

$$g(x) = x^2 \int_0^x f(t)\,dt - 2x\int_0^x tf(t)\,dt + \int_0^x t^2 f(t)\,dt$$

したがって

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2x\int_0^x f(t)\,dt + x^2 f(x) - 2\int_0^x tf(t)\,dt - 2x\cdot xf(x) + x^2 f(x) \\
&= 2x\int_0^x f(t)\,dt - 2\int_0^x tf(t)\,dt \\
g''(x) &= 2\int_0^x f(t)\,dt + 2x\cdot f(x) - 2xf(x) \\
&= 2\int_0^x f(t)\,dt \\
g'''(x) &= \boldsymbol{2f(x)}
\end{aligned}$$

(問 2) すべての x に対して $f(x) > 0$ であるから

$$x < 0 \text{ のとき} \quad \int_0^x f(t)\,dt < 0, \qquad x > 0 \text{ のとき} \quad \int_0^x f(t)\,dt > 0$$

問 1 の結果より，$g''(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ であるから

$$x < 0 \text{ のとき} \quad g''(x) < 0, \qquad x > 0 \text{ のとき} \quad g''(x) > 0$$

したがって，関数 $y = g(x)$ のグラフは

$x < 0$ では上に凸，　$x > 0$ では下に凸