平成 23 年度　熊本大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
理学部　平成 23 年 3 月 12 日

問題 1 2 3

1 p，q を実数とし，

$$A = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。

(1) 自然数 n に対して A^{2n} を求めよ。

(2) r，s を実数とし，数列 $a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots$ は

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ a_{2n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{2n-1} \\ a_{2n} \end{pmatrix} \quad (n \geqq 1)$$

を満たすとする。a_{27} を求めよ。

(3) $r=1$，$s=0$ のとき，和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{42} a_n$ を求めよ。

2 C を放物線 $y=x^2$ とする。

(1) C 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における 2 つの接線の交点を求めよ。

(2) $a^2 < b$ とする。点 $(a,\ b)$ を通り，傾き k の直線を ℓ とする。ℓ と C の交点を P，Q とする。点 P，Q における C の交点座標を a，b，k を用いて表せ。

3 $f(x) = (1+2x)\sin(\pi(x+x^2))$ として，以下の問いに答えよ。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right) - \sqrt{2}}{h}$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (x-a)f'(x)dx = 0$ となるように定数 a の値を求めよ。

解答例

$\boxed{1}$ (1)
$$A^2=\begin{pmatrix}0&p\\q&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&p\\q&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}pq&0\\0&pq\end{pmatrix}=pqE$$

よって
$$A^{2n}=(A^2)^n=(pqE)^n=p^nq^nE=\begin{pmatrix}\boldsymbol{p^nq^n}&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{p^nq^n}\end{pmatrix}$$

(2) 漸化式および (問 1) の結果により

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}a_{27}\\a_{28}\end{pmatrix}&=A^{13}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=(A^2)^6A\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\\&=p^6q^6\begin{pmatrix}0&p\\q&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}=p^6q^6\begin{pmatrix}ps\\qr\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって
$$a_{27}=p^6q^6\cdot ps=\boldsymbol{p^7q^6s}$$

(3) 漸化式により

$$\begin{pmatrix}a_{2n+1}\\a_{2n+2}\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}r\\s\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

上式および (問 1) の結果を用いて

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{20}\begin{pmatrix}a_{2j+1}\\a_{2j+2}\end{pmatrix}&=\sum_{j=0}^{20}A^j\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{10}(A^{2k}+A^{2k-1})\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{10}A^{2k-2}(A^2+A)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{10}(pq)^{k-1}\begin{pmatrix}pq&p\\q&pq\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{10}(pq)^{k-1}\begin{pmatrix}pq\\q\end{pmatrix}\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{42}a_n&=\sum_{j=0}^{20}(a_{2j+1}+a_{2j+2})=(1+0)+\sum_{k=1}^{10}(pq)^{k-1}(pq+q)\\&=1+(pq+q)\sum_{k=1}^{10}(pq)^{k-1}\end{aligned}$$

［1］ $pq \neq 1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{42} a_n = 1 + (pq+q)\sum_{k=1}^{10}(pq)^{k-1} = 1 + (pq+q) \times \frac{(pq)^{10}-1}{pq-1}$$
$$= \boldsymbol{\frac{(p+1)p^{10}q^{11}-q-1}{pq-1}}$$

［2］ $pq = 1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{42} a_n = 1 + (pq+q)\sum_{k=1}^{10}(pq)^{k-1} = 1 + (1+q)\cdot 10$$
$$= \boldsymbol{10q+11}$$

■

2 (1) $y' = 2x$ より，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方程式は

$$y - p^2 = 2p(x-p) \quad \text{すなわち} \quad y = 2px - p^2 \quad \cdots ①$$

同様に，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線の方程式は　$y = 2qx - q^2 \quad \cdots ②$

求める交点の座標は，①，② を解いて　$\boldsymbol{\left(\frac{p+q}{2},\ pq\right)}$

(2) ℓ は，点 $(a,\ b)$ を通り，傾き k の直線の方程式であるから

$$y - b = k(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = kx - ka + b$$

これと $y = x^2$ から y を消去すると　$x^2 - kx + ka - b = 0 \quad \cdots (*)$

$(*)$ の判別式 D は，$b - a^2 > 0$ により

$$D = (-k)^2 - 4\cdot 1(ka-b) = (k-2a)^2 + 4(b-a^2) > 0$$

したがって，方程式 $(*)$ は実数解をもつ．

$(*)$ の解が p，q であるから，解と係数の関係により

$$p + q = k, \quad pq = ka - b$$

よって，(1) の結果により，求める交点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{k}{2},\ ka-b\right)}$$

■

$\boxed{3}$ (1) $\boldsymbol{f'(x) = 2\sin\{\pi(x+x^2)\} + (1+2x)^2\pi\cos\{\pi(x+x^2)\}}$

(2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\sin\dfrac{3}{4}\pi = \sqrt{2}$ であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h} = f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

(1) の結果により

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sin\frac{3}{4}\pi + 4\pi\cos\frac{3}{4}\pi = \sqrt{2}(1-2\pi)$$

よって，上の 2 式から

$$\boldsymbol{\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-\sqrt{2}}{h} = \sqrt{2}(1-2\pi)}$$

(3) $f(0)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$，$\displaystyle\int f(x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos\{\pi(x+x^2)\}+C$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}(x-a)f'(x)dx &= \Big[\,(x-a)f(x)\,\Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \\ &= \left(\frac{1}{2}-a\right)f\left(\frac{1}{2}\right) + \left[\,\frac{1}{\pi}\cos\{\pi(x+x^2)\}\,\right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}-a\right)\sqrt{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x-a)f'(x)dx = 0$ より

$$\left(\frac{1}{2}-a\right)\sqrt{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) = 0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1+\sqrt{2}}{2\pi}}$ ■