平成 23 年度　熊本大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
理学部　平成 23 年 3 月 12 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ p，q を実数とし，

$$A=\begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。

(問 1) 自然数 n に対して A^{2n} を求めよ。

(問 2) r，s を実数とし，数列 a_1，$a_2,\dots,a_n,\dots$ は

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ a_{2n+2} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} a_{2n-1} \\ a_{2n} \end{pmatrix}\quad (n \geqq 1)$$

を満たすとする。a_{27} を求めよ。

(問 3) $r=1$，$s=0$ のとき，和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{42} a_n$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ C を放物線 $y=x^2$ とする。

(問 1) C 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における 2 つの接線の交点を求めよ。

(問 2) $a^2<b$ とする。点 $(a,\ b)$ を通り，傾き k の直線を ℓ とする。ℓ と C の交点を P，Q とする。点 P，Q における C の交点座標を a，b，k を用いて表せ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x)=(1+2x)\sin(\pi(x+x^2))$ として，以下の問いに答えよ。

(問 1) $f'(x)$ を求めよ。

(問 2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-\sqrt{2}}{h}$ を求めよ。

(問 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x-a)f'(x)dx=0$ となるように定数 a の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) $$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} pq & 0 \\ 0 & pq \end{pmatrix} = pqE$$

よって $$A^{2n} = (A^2)^n = (pqE)^n = p^n q^n E = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p^n q^n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{p^n q^n} \end{pmatrix}$$

(問 2) 漸化式および (問 1) の結果により

$$\begin{pmatrix} a_{27} \\ a_{28} \end{pmatrix} = A^{13}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = (A^2)^6 A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$
$$= p^6 q^6 \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = p^6 q^6 \begin{pmatrix} ps \\ qr \end{pmatrix}$$

よって $$a_{27} = p^6 q^6 \cdot ps = \boldsymbol{p^7 q^6 s}$$

(問 3) 漸化式により

$$\begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ a_{2n+2} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

上式および (問 1) の結果を用いて

$$\sum_{j=0}^{20} \begin{pmatrix} a_{2j+1} \\ a_{2j+2} \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{20} A^j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{10} (A^{2k} + A^{2k-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{10} A^{2k-2}(A^2 + A) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{10} (pq)^{k-1} \begin{pmatrix} pq & p \\ q & pq \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{10} (pq)^{k-1} \begin{pmatrix} pq \\ q \end{pmatrix}$$

したがって

$$\sum_{n=1}^{42} a_n = \sum_{j=0}^{20} (a_{2j+1} + a_{2j+2}) = (1+0) + \sum_{k=1}^{10} (pq)^{k-1}(pq+q)$$
$$= 1 + (pq+q)\sum_{k=1}^{10} (pq)^{k-1}$$

［1］ $pq \neq 1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{42} a_n = 1 + (pq+q)\sum_{k=1}^{10}(pq)^{k-1} = 1 + (pq+q) \times \frac{(pq)^{10}-1}{pq-1}$$
$$= \boldsymbol{\frac{(p+1)p^{10}q^{11}-q-1}{pq-1}}$$

［2］ $pq = 1$ のとき

$$\sum_{n=1}^{42} a_n = 1 + (pq+q)\sum_{k=1}^{10}(pq)^{k-1} = 1 + (1+q)\cdot 10$$
$$= \boldsymbol{10q+11}$$

$\boxed{\textbf{2}}$

(問 1) $y' = 2x$ より，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方程式は

$$y - p^2 = 2p(x-p) \quad \text{すなわち} \quad y = 2px - p^2 \quad \cdots①$$

同様に，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ における接線の方程式は　$y = 2qx - q^2 \quad \cdots②$

求める交点の座標は，①，② を解いて　$\boldsymbol{\left(\frac{p+q}{2},\ pq\right)}$

(問 2) ℓ は，点 $(a,\ b)$ を通り，傾き k の直線の方程式であるから

$$y - b = k(x-a) \quad \text{すなわち} \quad y = kx - ka + b$$

これと $y = x^2$ から y を消去すると　$x^2 - kx + ka - b = 0 \quad \cdots(*)$
$(*)$ の判別式 D は，$b - a^2 > 0$ により

$$D = (-k)^2 - 4\cdot 1(ka-b) = (k-2a)^2 + 4(b-a^2) > 0$$

したがって，方程式 $(*)$ は実数解をもつ．
$(*)$ の解が p，q であるから，解と係数の関係により

$$p + q = k, \quad pq = ka - b$$

よって，(問 1) の結果により，求める交点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{k}{2},\ ka-b\right)}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1) $\boldsymbol{f'(x) = 2\sin\{\pi(x+x^2)\} + (1+2x)^2\pi\cos\{\pi(x+x^2)\}}$

(問 2) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2\sin\dfrac{3}{4}\pi = \sqrt{2}$ であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\dfrac{1}{2}+h\right)-\sqrt{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(\dfrac{1}{2}+h\right)-f\left(\dfrac{1}{2}\right)}{h} = f'\left(\frac{1}{2}\right)$$

(問 1) の結果により

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sin\frac{3}{4}\pi + 4\pi\cos\frac{3}{4}\pi = \sqrt{2}(1-2\pi)$$

よって，上の 2 式から

$$\boldsymbol{\lim_{h\to 0}\frac{f\left(\dfrac{1}{2}+h\right)-\sqrt{2}}{h} = \sqrt{2}(1-2\pi)}$$

(問 3) $f(0)=0$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{2}$，$\displaystyle\int f(x)\,dx = -\frac{1}{\pi}\cos\{\pi(x+x^2)\}+C$ であるから

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}}(x-a)f'(x)dx &= \Big[\ (x-a)f(x)\ \Big]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx \\ &= \left(\frac{1}{2}-a\right)f\left(\frac{1}{2}\right) + \left[\ \frac{1}{\pi}\cos\{\pi(x+x^2)\}\ \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2}-a\right)\sqrt{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right)\end{aligned}$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x-a)f'(x)dx = 0$ より

$$\left(\frac{1}{2}-a\right)\sqrt{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) = 0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1+\sqrt{2}}{2\pi}}$