平成 22 年度　熊本大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
理学部　平成 22 年 3 月 12 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ x，y を実数とし，行列 $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ を考える。また

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。以下の問いに答えよ。

(問 1) a，b を実数とするとき，次の等式

$$X^2 + aX + bE = O$$

を満たす行列 X を求めよ。

(問 2) 等式 $X^3 = E$ を満たす行列 X をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ a を $-1 < a < 1$ を満たす実数とする。xy 平面上の原点を O とし，点 A の座標を (1, 0) とする。円 $C : x^2 + y^2 = 1$ 上の点 P を，その y 座標が正で，かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = a$ を満たすものとする。

(問 1) 三角形 OAP の面積を求めよ。

(問 2) 2 点 A，P から等距離にある C 上の点は 2 つある。この 2 点の座標を求めよ。

(問 3) 点 A，点 P および (問 2) で求めた 2 点を頂点とする四角形の面積を S とする。S が三角形 OAP の面積の 3 倍となるような a の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 0 以上の整数 n に対して，$x \geqq 0$ で定義された関数 $I_n(x)$ を

$$I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t}\, dt$$

とおく。このとき以下の問いに答えよ。

(問 1) $n \geqq 1$ のとき，$I_n(x)$ を $I_{n-1}(x)$ を用いて表せ。

(問 2) $n \geqq 1$ のとき，等式

$$I_0(x) - \frac{I_n(x)}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} e^{-x}$$

が成り立つことを示せ。

(問 3) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \frac{I_n(x)}{n!} = 0$$

が成り立つことを示せ。

(問 4) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

が成り立つことを示せ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) X にハミルトン・ケーリーの定理を適用すると

$$X^2 - 2xX + (x^2 + y^2)E = O \tag{1}$$

(1) および X が満たす等式 $X^2 + aX + bE = O$ から X^2 を消去すると

$$-(2x + a)X + (x^2 + y^2 - b)E = O$$

上式について，次の 2 つに場合分けをする．

［1］ $2x + a = 0$ のとき

$$2x + a = 0, \quad x^2 + y^2 - b = 0$$

x，y が実数であることに注意して，これを解くと

$$x = -\frac{a}{2}, \quad y = \pm\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2} \quad (4b - a^2 \geqq 0)$$

［2］ $2x + a \neq 0$ のとき
$X = kE$ とおけるので (k は実数)，X の成分から $k = x$，$y = 0$
ゆえに $X = xE$ とおける．これを $X^2 + aX + bE = O$ に代入すると

$$(x^2 + ax + b)E = O$$

よって，方程式 $x^2 + ax + b = 0$ を解いて　$x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$
このとき x は実数であり，$x \neq -\dfrac{a}{2}$ であることに注意して

$$x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad y = 0, \quad (a^2 - 4b > 0)$$

したがって，行列 $X = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$ は

$$\boldsymbol{4b - a^2 \geqq 0} \textbf{ のとき } \quad \boldsymbol{x = -\frac{a}{2}, \quad y = \pm\frac{\sqrt{4b - a^2}}{2}}$$

$$\boldsymbol{4b - a^2 < 0} \textbf{ のとき } \quad \boldsymbol{x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad y = 0}$$

(問 2) (1) から　$X^2 = 2xX - (x^2 + y^2)E$

これを X^3 に代入すると

$$\begin{aligned} X^3 &= XX^2 \\ &= X\{2xX - (x^2+y^2)E\} \\ &= 2xX^2 - (x^2+y^2)X \\ &= 2x\{2xX - (x^2+y^2)E\} - (x^2+y^2)X \\ &= (3x^2 - y^2)X - 2x(x^2+y^2)E \end{aligned}$$

$X^3 = E$ をこれに代入して，整理すると

$$(3x^2 - y^2)X - \{2x(x^2+y^2)+1\}E = O$$

上式について，次の 2 つに場合分けをする．

［1］ $3x^2 - y^2 = 0$ のとき

$$3x^2 - y^2 = 0, \quad 2x(x^2+y^2)+1 = 0$$

これを解いて　$x = -\dfrac{1}{2}, \quad y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

［2］ $3x^2 - y^2 \neq 0$ のとき

$X = kE$ とおけるので (k は実数)，X の成分から $k = x$，$y = 0$

ゆえに $X = xE$ とおける．これを $X^3 = E$ に代入すると

$$(x^3 - 1)E = O$$

x は実数であることに注意して，方程式 $x^3 - 1 = 0$ を解くと

$$x = 1$$

このとき，$x = 1$，$y = 0$ は $3x^2 - y^2 \neq 0$ を満たす.

したがって，$X^3 = E$ を満たす行列 X は

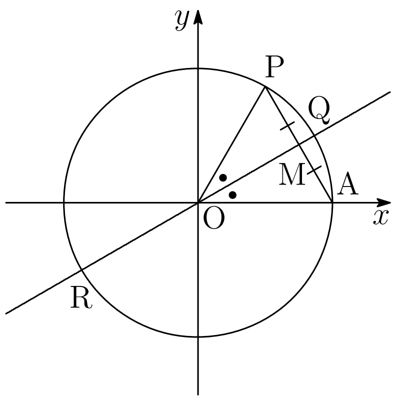
$$\boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \mp\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \quad \textbf{(複号同順)}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(問 1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a$ であるから

$$\triangle\mathrm{OAP}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{1-a^2}}$$

(問 2) A，P の中点を M とすると，$\triangle\mathrm{OAM}\equiv\mathrm{OPM}$ であるから，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{AP}$．ゆえに，直線 OM は，AP の垂直二等分線である．したがって，求める 2 点は，C と OM の交点である．この 2 点を右の図のように Q，R とし，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ とすると $(0^\circ<\theta<180^\circ)$



$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta$$

これに $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=1$ を代入すると

$$\cos\theta=a \tag{2}$$

このとき，Q の座標は $\left(\cos\frac{\theta}{2},\ \sin\frac{\theta}{2}\right)$

(2) より

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}=\frac{1+a}{2} \tag{3}$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}=\frac{1-a}{2} \tag{4}$$

$0^\circ<\frac{\theta}{2}<90^\circ$ であるから　$\cos\frac{\theta}{2}>0$，$\sin\frac{\theta}{2}>0$

(3)，(4) より Q の座標は $\left(\sqrt{\frac{1+a}{2}},\ \sqrt{\frac{1-a}{2}}\right)$

また，R は Q と原点に関して対称であるから，その座標は

$$\left(-\sqrt{\frac{1+a}{2}},\ -\sqrt{\frac{1-a}{2}}\right)$$

よって，求める 2 点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\pm\sqrt{\frac{1+a}{2}},\ \pm\sqrt{\frac{1-a}{2}}\right)}\quad\textbf{(複号同順)}$$

(問 3) $\triangle$OAP に余弦定理を適用すると

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= \mathrm{OA}^2+\mathrm{AP}^2-2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}\cos\theta\\ &= 1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot a\\ &= 2(1-a)\end{aligned}$$

$\mathrm{AP}>0$ であるから　　$\mathrm{AP}=\sqrt{2(1-a)}$
したがって，面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{QR}\cdot\mathrm{AP}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2(1-a)}=\sqrt{2(1-a)}$$

このとき，$S=3\triangle\mathrm{OAP}$ であるから

$$\sqrt{2(1-a)}=3\times\frac{1}{2}\sqrt{1-a^2}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$，(2) より $a\neq1$ であるから

$$\sqrt{2}=\frac{3}{2}\sqrt{1+a}\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{a=-\frac{1}{9}}$$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1) $n\geqq1$ のとき

$$\begin{aligned}I_n(x) &= \int_0^x t^ne^{-t}\,dt=-\int_0^x t^n(e^{-t})'\,dt\\ &= -\Big[\,t^ne^{-t}\,\Big]_0^x+n\int_0^x t^{n-1}e^{-t}\,dt\\ &= \boldsymbol{-x^ne^{-x}+nI_{n-1}(x)}\end{aligned}$$

(問 2) $1\leqq k\leqq n$ のとき，(問 1) の結果から

$$\frac{I_k(x)}{k!}=-\frac{x^k}{k!}e^{-x}+\frac{kI_{k-1}(x)}{k!}$$

ゆえに　　$\dfrac{I_{k-1}(x)}{(k-1)!}-\dfrac{I_k(x)}{k!}=\dfrac{x^k}{k!}e^{-x}$

k について加えると　　$\displaystyle\sum_{k=1}^n\left\{\frac{I_{k-1}(x)}{(k-1)!}-\frac{I_k(x)}{k!}\right\}=\sum_{k=1}^n\frac{x^k}{k!}e^{-x}$

よって　　$\displaystyle\boldsymbol{I_0(x)-\frac{I_n(x)}{n!}=\sum_{k=1}^n\frac{x^k}{k!}e^{-x}}$

(問 3) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき $\quad \dfrac{t^n}{e} \leqq t^n e^{-t} \leqq t^n$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき

$$\int_0^x \frac{t^n}{e}\,dt \leqq \int_0^x t^n e^{-t}\,dt \leqq \int_0^x t^n\,dt$$

したがって $\quad \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)e} \leqq I_n(x) \leqq \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!\cdot e} \leqq \frac{I_n(x)}{n!} \leqq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

ゆえに $\quad 0 \leqq \dfrac{I_n(x)}{n!} \leqq \dfrac{1}{(n+1)!}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!} = 0$ であるから，はさみうちの原理により

$$\boldsymbol{0 \leqq x \leqq 1} \textbf{ のとき} \qquad \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} \frac{I_n(x)}{n!} = 0}$$

(問 4) $I_0(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t}\,dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^x = -e^{-x} + 1$

$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，これを (問 2) の結果に代入すると

$$-e^{-x} + 1 + \frac{I_n(x)}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

$$1 + \frac{I_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

$$e^x + \frac{I_n(x)}{n!} e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!}$$

(問 3) の結果から $\quad \boldsymbol{\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} = e^x}$

補足

$f(t)$ を必要な回数だけ微分可能な関数とし (C_∞級)，$k \geqq 1$ とする．

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt = -\int_a^x \left\{\frac{(x-t)^k}{k!}\right\}' f^{(k)}(t)\,dt$$
$$= -\left[\ \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k)}(t)\ \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt$$
$$= \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt$$

よって $\displaystyle \int_a^x \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt = \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$

上式を $k = 1, 2, 3, \ldots n-1$ について辺々を加えると

$$\int_a^x f'(t)\,dt - \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

ゆえに

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt \tag{5}$$

積分区間における $f^{(n)}(t)$ が最大値，最小値をもつとき，それらをそれぞれ M，m とすると，$\displaystyle \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt$ は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} M\,dt = \frac{M}{n!}(x-a)^n, \quad \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} m\,dt = \frac{m}{n!}(x-a)^n$$

の間の値をとるので，この区間内のある c は

$$\int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{6}$$

を満たす．(6) を (5) に代入すると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{7}$$

(7) を $f(x)$ の $x = a$ におけるテイラー展開 (Taylor expansion) という．とくに $a = 0$ とすると

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} x^n \tag{8}$$

となり，これをマクローリン展開 (Maclaurin's expansion) という．(問 4) の結果は，(8) において，$f(x) = e^x$，$n \to \infty$ とすることにより得られる．