平成 21 年度　熊本大学 2 次試験後期日程 (数学問題)
理学部　平成 21 年 3 月 12 日

$\boxed{\mathbf{1}}$ 平面上の円 C_1，C_2，C_3 を

$$C_1 : (x+4)^2+(y+1)^2=1,\ C_2 : x^2+(y-4)^2=9,\ C_3 : (x-4)^2+(y+3)^2=1$$

で定義するとき，次の問いに答えよ。

(問 1) 原点 $(0,\ 0)$ を通り，C_1 に接する直線をすべて求めよ。

(問 2) 原点 $(0,\ 0)$ を通り，C_1，C_2，C_3 のいずれとも共有点をもたない直線をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 関数 $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\sin x}$ について，次の問いに答えよ。

(問 1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とするとき，y を t の式で表せ。

(問 2) $-\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ とするとき，y の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_n=\int_0^{n\pi}e^{-2x}\cos x\,dx,\quad b_n=\int_0^{n\pi}e^{-2x}\sin x\,dx\quad(n=1,2,3,\ldots)$$

で定義するとき，次の問いに答えよ。

(問 1) 数列 $\{2a_n+b_n\}$ と $\{2b_n-a_n\}$ の一般項をそれぞれ求めよ。

(問 2) 一般項 a_n と b_n をそれぞれ求めよ。

(問 3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ をそれぞれ求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) C_1 は y 軸に接しないので，求める直線を $y = kx$ とおける．C_1 の中心 $(-4, -1)$ からこの直線 $kx - y = 0$ までの距離が C_1 の半径 1 に等しいから

$$\frac{|\,k\cdot(-4) - (-1)\,|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = 1 \quad \text{整理して} \quad 15k^2 - 8k = 0$$

したがって　　$k = 0,\ \dfrac{8}{15}$

よって，求める直線は　　$\boldsymbol{y = 0,\ \ y = \dfrac{8}{15}x}$

(問 2) C_2 は y 軸と共有点をもつので，求める直線を $y = kx$ とおける．
この直線 $kx - y = 0$ との位置関係について

C_1 と共有点をもたないとき　　$\dfrac{|\,k\cdot(-4) - (-1)\,|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} > 1$

C_2 と共有点をもたないとき　　$\dfrac{|\,k\cdot 0 - 4\,|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} > 3$

C_3 と共有点をもたないとき　　$\dfrac{|\,k\cdot 4 - (-3)\,|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} > 1$

整理すると　$15k^2 - 8k > 0$，$9k^2 - 7 < 0$，$15k^2 + 24k + 8 > 0$

これらを解くと

$$k < 0,\ \frac{8}{15} < k \qquad \cdots ①$$

$$-\frac{\sqrt{7}}{3} < k < \frac{\sqrt{7}}{3} \qquad \cdots ②$$

$$k < \frac{-12 - 2\sqrt{6}}{15},\quad \frac{-12 + 2\sqrt{6}}{15} < k \qquad \cdots ③$$

①，②，③ の共通範囲により，求める直線の方程式は

$$\boldsymbol{y = kx \quad \left(\frac{-12 + 2\sqrt{6}}{15} < k < 0,\ \frac{8}{15} < k < \frac{\sqrt{7}}{3}\right)}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(問 1) $t=\tan\dfrac{x}{2}$ とするとき，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

ゆえに $$\frac{\sin x-\cos x}{1-\sin x}=\frac{\dfrac{2t}{1+t^2}-\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\dfrac{2t}{1+t^2}}=\frac{-1+2t+t^2}{1-2t+t^2}$$

よって $$\boldsymbol{y=\frac{-1+2t+t^2}{1-2t+t^2}}$$

(問 2) $-\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ のとき $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\cdots$①

$y=\dfrac{-1+2t+t^2}{1-2t+t^2}$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{-1+2t+t^2}{1-2t+t^2}&=\frac{2-4(1-t)+(1-t)^2}{(1-t)^2}\\&=\frac{2}{(1-t)^2}-\frac{4}{1-t}+1\end{aligned}$$

$u=\dfrac{1}{1-t}$ とおくと $y=2u^2-4u+1=2(u-1)^2-1$

このとき，① から $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\leqq u\leqq\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

よって，y は

$u=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$ すなわち $\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{3}}$ **で最大値** $\boldsymbol{1+\sqrt{3}}$

$u=1$ すなわち $\boldsymbol{x=0}$ **で最小値** $\boldsymbol{-1}$

をとる．

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1) $\{2a_n + b_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}2a_n + b_n &= 2\int_0^{n\pi} e^{-2x}\cos x\,dx + \int_0^{n\pi} e^{-2x}\sin x\,dx \\ &= -\int_0^{n\pi} \{(e^{-2x})'\cos x + e^{-2x}(\cos x)'\}dx \\ &= -\int_0^{n\pi} (e^{-2x}\cos x)'\,dx \\ &= -\Big[\, e^{-2x}\cos x \,\Big]_0^{n\pi} \\ &= \boldsymbol{-(-1)^n e^{-2n\pi} + 1}\end{aligned}$$

$\{2b_n - a_n\}$ の一般項は

$$\begin{aligned}2b_n - a_n &= 2\int_0^{n\pi} e^{-2x}\sin x\,dx - \int_0^{n\pi} e^{-2x}\cos x\,dx \\ &= -\int_0^{n\pi} \{(e^{-2x})'\sin x + e^{-2x}(\sin x)'\}dx \\ &= -\int_0^{n\pi} (e^{-2x}\sin x)'\,dx \\ &= -\Big[\, e^{-2x}\sin x \,\Big]_0^{n\pi} \\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

(問 2) (問 1) の結果から

$$\boldsymbol{a_n = \frac{2 - 2\cdot(-1)^n e^{-2n\pi}}{5},\quad b_n = \frac{1 - (-1)^n e^{-2n\pi}}{5}}$$

(問 3) (問 2) の結果から

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{5},\quad \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{5}}$$