平成20年度　熊本大学2次試験後期日程(数学問題)
理学部　平成20年3月12日

$\boxed{\mathbf{1}}$ $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$，$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(問1) P の逆行列 P^{-1} を求めよ。

(問2) $B = P^{-1}AP$ を求めよ。

(問3) 自然数 n に対して，B^n と A^n を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 数列 $\{a_k\}$ を定積分

$$a_k = \int_0^k x\sin(k(k+1)\pi x)\,dx \qquad (k = 1, 2, 3, \cdots)$$

で定義するとき，次の問いに答えよ。

(問1) 一般項 a_k を求めよ。

(問2) $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 関数 $f(x) = kx^3 - 2kx + 1$ について，次の問いに答えよ。

(問1) $x \geqq 0$ のとき，つねに $f(x) \geqq 0$ となるように，定数 k の値の範囲を定めよ。

(問2) $y = f(x)$ のグラフが $x \geqq 0$ のとき，k の値によらずに通る2つの点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ を求めよ。ただし，$0 \leqq a < b$ とする。

(問3) $k > 0$ のとき，線分 AB と $y = f(x)$ のグラフによって囲まれた部分の面積を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) $\det P = 2\cdot 1 - 3\cdot 1 = -1 \neq 0$ より P は逆行列をもつ

$$P^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

(問 2) 問 1 の結果より

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

(問 3) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ を n 乗すると　$B^n = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{2^n} \end{pmatrix}$

また，$B = P^{-1}AP$ の両辺を n 乗すると

$$\begin{aligned} B^n &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP) \\ &= P^{-1}AA\cdots AP \\ &= P^{-1}A^nP \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} A^n &= PB^nP^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \boldsymbol{-2+3\cdot 2^n} & \boldsymbol{6-3\cdot 2^{n+1}} \\ \boldsymbol{-1+2^n} & \boldsymbol{3-2^{n+1}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

解説 問 1 の $P = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$ について，$\vec{u}$，$\vec{v}$ はそれぞれ A 固有値 1 および 2 の固有ベクトルである．

$$A\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & 2\vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

上式から　$AP = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　したがって　$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

スペクトル分解

一般に，行列 A が異なる 2 つの固有値 α，β をもつとき，固有値 α に対する固有ベクトルを $\vec{u}$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$，固有値 β に対する固有ベクトルを $\vec{v}$ $(\vec{v} \neq \vec{0})$ とし，行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix}$$

とおくと，$\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ であるから (熊本大学 2008 年度一般前期[1]の 8 ページで解説)，行列 P は正則である．

$\vec{u} = (u_1,\ u_2)$，$\vec{v} = (v_1,\ v_2)$ のなす角を θ とすると $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$

$$\begin{aligned} |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 \sin^2\theta = |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1-\cos^2\theta) &= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2 - (|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta)^2 \\ &= ({u_1}^2 + {u_2}^2)({v_1}^2 + {v_2}^2) - (u_1v_1 + u_2v_2)^2 \\ &= (u_1v_2 - u_2v_1)^2 \end{aligned}$$

$|\vec{u}| > 0$，$|\vec{v}| > 0$，$\sin\theta \geqq 0$ であるから

$$|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta = |u_1v_2 - u_2v_1|$$

行列 $P = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$ について，$\det P = u_1v_2 - v_1u_2$ より

$$|\det P| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$$

したがって　$\vec{u} \not\parallel \vec{v}$ のとき　$\det P \neq 0$　　$\longleftarrow$ $\theta \neq 0^\circ$，180° より $\sin\theta > 0$

このとき，2 つの 1 次変換を表す行列 F，G を

$$F\vec{u} = \vec{u},\quad F\vec{v} = \vec{0},\quad G\vec{u} = \vec{0},\quad G\vec{v} = \vec{v}$$

で定義すると，次が成り立つ．

$$F^2 = F,\quad G^2 = G,\quad FG = GF = O,\quad F + G = E,\quad A = \alpha F + \beta G$$

証明 $FP = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix}$，$F^2P = F(FP) = F\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{0} \end{pmatrix}$
よって，$F^2P = FP$ であり，P は正則であるから　$F^2 = F$ ■
$FGP = F(GP) = F\begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} & \vec{0} \end{pmatrix}$
よって，$FGP = O$ であり，P は正則であるから　$FG = O$ ■

[1] http://kumamoto.s12.xrea.com/nyusi/kumadai_ri_2008.pdf

同様にして　$G^2=G$，$GF=O$ ■
$(F+G)P=FP+GP=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{0}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\vec{0} & \vec{v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{v}\end{pmatrix}$
よって，$(F+G)P=P$ であり，P は正則であるから　$F+G=E$ ■

$$\begin{aligned}AP&=\begin{pmatrix}\alpha\vec{u} & \beta\vec{v}\end{pmatrix}\\&=\alpha\begin{pmatrix}\vec{u} & \vec{0}\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}\vec{0} & \vec{v}\end{pmatrix}\\&=\alpha FP+\beta GP\\&=(\alpha F+\beta G)P\end{aligned}$$

上式から，P は正則であるから，$A=\alpha F+\beta G$ ■
これを，A の**スペクトル分解**という.　**証終**

以上のことから，$A=\alpha F+\beta G$ の両辺を n 乗すると　$A^n=\alpha^nF+\beta^nG$
なお，F，G は，$\alpha F+\beta G=A$，$F+G=E$ により

$$F=\frac{A-\beta E}{\alpha-\beta},\qquad G=\frac{A-\alpha E}{\beta-\alpha}$$

今回の出題では A は P により対角化 (行列 B) することができたが，P が与えられていない場合は，$A=\begin{pmatrix}4 & -6\\1 & -1\end{pmatrix}$ の固有方程式[2]

$$\lambda^2-3\lambda+2=0 \text{ を解いて}\quad \alpha=1,\ \beta=2$$

ゆえに　$F=\dfrac{A-2E}{1-2}=\begin{pmatrix}-2 & 6\\-1 & 3\end{pmatrix}$，$G=\dfrac{A-E}{2-1}=\begin{pmatrix}3 & -6\\1 & -2\end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}A^n&=F+2^nG\\&=\begin{pmatrix}-2 & 6\\-1 & 3\end{pmatrix}+2^n\begin{pmatrix}3 & -6\\1 & -2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}-2+3\cdot2^n & 6-3\cdot2^{n+1}\\-1+2^n & 3-2^{n+1}\end{pmatrix}\quad ■\end{aligned}$$

[2] 行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ の固有方程式 $\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$ の解が固有値である.

とくに，A の固有方程式が重解 α をもつとき，解と係数の関係から

$$a+d=2\alpha,\quad ad-bc=\alpha^2$$

これをハミルトン・ケーリーの公式に代入して

$$A^2-2\alpha A+\alpha^2E=O \quad \text{すなわち} \quad (A-\alpha E)^2=O$$

$B=A-\alpha E$ とおくと，$B^2=O$ である．$A=B+\alpha E$ の両辺を n 乗すると，二項定理により

$$\begin{aligned}
A^n &= (B+\alpha E)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k B^{n-k}(\alpha E)^k \qquad (B^n=B^{n-1}=\cdots=B^2=O) \\
&= n\alpha^{n-1}B+\alpha^nE
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(問 1) (部分積分法を用いる)

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_0^1 x\sin k(k+1)\pi x\,dx \\
&= -\int_0^1 x\left\{\frac{\cos k(k+1)\pi x}{k(k+1)\pi}\right\}' dx \\
&= -\left[\frac{x\cos k(k+1)\pi x}{k(k+1)\pi}\right]_0^1+\int_0^1 \frac{\cos k(k+1)\pi x}{k(k+1)\pi}\,dx \\
&= -\frac{1}{k(k+1)\pi}+\left[\frac{\sin k(k+1)\pi x}{k^2(k+1)^2\pi^2}\right]_0^1 \\
&= \boldsymbol{-\frac{1}{k(k+1)\pi}}
\end{aligned}$$

(問 2) 問 1 の結果から

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{1}{k(k+1)\pi}\right\} \\
&= -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\
&= -\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

よって　$\displaystyle \boldsymbol{\lim_{n\to\infty} A_n = -\frac{1}{\pi}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1) $f(x) = kx^3 - 2kx + 1 = k(x^3 - 2x) + 1$ であるから

$g(x) = x^3 - 2x$ とおくと　$g'(x) = 3x^2 - 2$

$x \geqq 0$ のとき，$g'(x) = 0$ とすると　$x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$

$g(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	0	$\searrow$	極小 $-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\nearrow$

また，$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ であるから，$k \geqq 0$ でなければならない．

したがって，$x \geqq 0$ のとき，$f(x)$ の最小値は　$-\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}k + 1$

ゆえに　$-\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}k + 1 \geqq 0$

$k \geqq 0$ に注意して　$\boldsymbol{0 \leqq k \leqq \dfrac{3\sqrt{6}}{8}}$

(問 2) $y = kx^3 - 2kx + 1$ から　$k(x^3 - 2x) + 1 - y = 0$　$\cdots$①

k の値によらず通る点は，① が k についての恒等式となる $(x,\ y)$ である．

ゆえに　　$x^3 - 2x = 0,\ 1 - y = 0$

$x \geqq 0$ であるから　$x = 0, \sqrt{2},\ y = 1$

よって　　**A(0, 1)，B($\boldsymbol{\sqrt{2}}$, 1)**

(問 3) 問 2 の結果から，線分 AB は　$y = 1\ (0 \leqq x \leqq \sqrt{2})$

$f''(x) = 6kx$ であるから $(k > 0)$，$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ において $f''(x) \geqq 0$

したがって，この区間で $y = f(x)$ は下に凸である．

よって，線分 AB と $y = f(x)$ で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{2}} \{1 - (kx^3 - 2kx + 1)\}\,dx \\ &= k\int_0^{\sqrt{2}} (-x^3 + 2x)\,dx \\ &= k\left[-\frac{x^4}{4} + x^2\right]_0^{\sqrt{2}} = \boldsymbol{k} \end{aligned}$$