平成19年度　熊本大学2次試験後期日程(数学問題)
理学部　平成19年3月12日(120分)

$\boxed{\mathbf{1}}$ 次の問いに答えよ。

(問1) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 3A + 2E = O$ をみたすとき，$ad - bc$ の値をすべて求めよ。ただし，$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とする。

(問2) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{x \log(1 + 2x)}$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ 曲線 $y = \dfrac{1}{x^2}$ $(x > 0)$ を C とし，C 上の点 $\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ における接線を l とする。このとき，次の問いに答えよ。

(問1) 直線 l の方程式を求めよ。

(問2) 直線 l と x 軸との交点を $(p,\ 0)$ としたとき，p を求めよ。

(問3) 直線 l と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を S，曲線 C と x 軸および2直線 $x = p$，$x = a$ で囲まれた図形の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ 数列 $\{a_n\}$ は

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{36 + 5a_n}\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

で与えられているとする。また，$f(x) = \sqrt{36 + 5x} - x$ とし，x に関する方程式 $f(x) = 0$ の正の解を a とする。このとき，次の問いに答えよ。

(問1) a の値を求めよ。

(問2) すべての正の整数 n について，$a_n \leqq a$ であることを証明せよ。

(問3) $0 \leqq x \leqq a$ において，$f(x) \geqq \dfrac{2}{3}(a - x)$ であることを証明せよ。

(問4) $b_n = a - a_n$ とするとき，すべての正の整数 n について，$b_{n+1} \leqq \dfrac{1}{3}b_n$ であることを証明せよ。

(問5) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} a_n$ の値を求めよ。

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$

(問 1) ハミルトン・ケーリーの定理から

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O \quad \cdots ①$$

仮定から　$A^2-3A+2E=O \qquad \cdots ②$

② − ① より　$(a+d-3)A-(ad-bc-2)E=O$

［1］ $a+d-3=0$ のとき

$-(ad-bc-2)E=O$，$E\neq O$ より　$-(ad-bc-2)=0$

よって　　$ad-bc=2$

［2］ $a+d-3\neq 0$ のとき

$k=\dfrac{ad-bc-2}{a+d-3}$ とおくと　$A=kE \quad \cdots ③$

③ を ② に代入して　$(k^2-3k+2)E=O$

$E\neq O$ より　　$k^2-3k+2=0$

ゆえに　　$k=1,\ 2$

③ より　$k=1$ のとき $ad-bc=1$

$k=2$ のとき $ad-bc=4$

［1］，［2］ より　$\boldsymbol{ad-bc=1,\ 2,\ 4}$

(問 2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x\log(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{\frac{\log(1+2x)}{2x}}\times\frac{1}{2} \quad \cdots (*)$

$x^2=h$，$2x=k$ とおくと，$x\to 0$ のとき $h\to +0$，$k\to 0$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}=\lim_{h\to +0}\frac{e^h-1}{h}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{2x}=\lim_{k\to 0}\frac{\log(1+k)}{k}$$

ここで，$f(x)=e^x$，$g(x)=\log(1+x)$ とすると，これらの関数は，$x=0$ で微分可能であるから

$$\lim_{h\to +0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0)=1$$

$$\lim_{k\to 0}\frac{\log(1+k)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{g(k)-g(0)}{k}=g'(0)=1$$

$(*)$ より　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x\log(1+2x)}=\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(問 1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ とすると $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$ であるから　$f'(a) = -\dfrac{2}{a^3}$

よって，点 $\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ における接線 l の方程式は

$$y - \frac{1}{a^2} = -\frac{2}{a^3}(x-a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = -\frac{2x}{a^3} + \frac{3}{a^2}} \quad \cdots ①$$

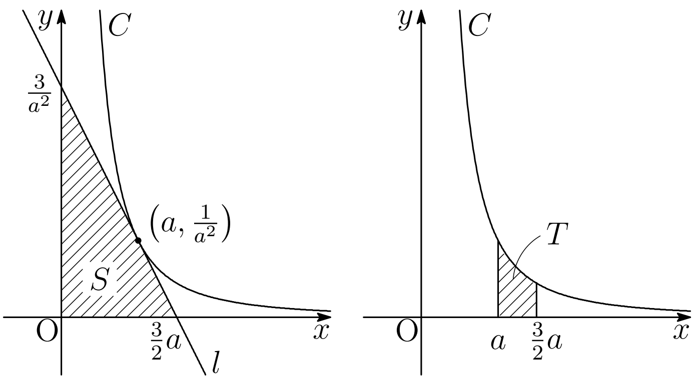
(問 2) ① に $x = p$，$y = 0$ を代入して　$\boldsymbol{p = \dfrac{3}{2}a}$

(問 3) S，T は下の図のようになるから

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}a \times \frac{3}{a^2} = \frac{9}{4a}$$

$$T = \int_a^{\frac{3}{2}a} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{\frac{3}{2}a} = -\frac{2}{3a} + \frac{1}{a} = \frac{1}{3a}$$

したがって　$\dfrac{S}{T} = \dfrac{9}{4a} \div \dfrac{1}{3a} = \boldsymbol{\dfrac{27}{4}}$



$\boxed{\textbf{3}}$

(問 1) $f(x)=0$ より　　　　　　　$x=\sqrt{36+5x}$

両辺を平方して整理すると　　$x^2-5x-36=0$

すなわち　　　　　　　　　$(x+4)(x-9)=0$

$x=\sqrt{36+5x}\geqq 0$ より　　　　$x=9$

したがって　　$\boldsymbol{a=9}$

(問 2) $a_1=1>0$，また $a_{n+1}=\sqrt{36+5a_n}\cdots$ ① より $a_n>0$ のとき $a_{n+1}>0$

したがって，すべての正の整数 n について　$a_n>0$

① から

$$\begin{aligned}9-a_{n+1}&=9-\sqrt{36+5a_n}\\&=\frac{(9-\sqrt{36+5a_n})(9+\sqrt{36+5a_n})}{9+\sqrt{36+5a_n}}\\&=\frac{5}{9+\sqrt{36+5a_n}}(9-a_n)\qquad\cdots ②\end{aligned}$$

$9-a_1=9-1>0$，また上式から $9-a_{n+1}$ は $9-a_n$ と同符号である．

したがって，すべての正の整数 n について　$9-a_n>0$

ゆえに $\boldsymbol{a_n\leqq 9}$ が成り立つ．　$\longleftarrow(x<y\Longrightarrow x\leqq y)$

(問 3)
$$f(x)\geqq\frac{2}{3}(9-x)\quad\Longleftrightarrow\quad\sqrt{36+5x}\geqq 6+\frac{x}{3}$$

したがって，$0\leqq x\leqq 9$ において $\sqrt{36+5x}\geqq 6+\dfrac{x}{3}$ を証明すればよい．

$$(\sqrt{36+5x})^2-\left(6+\frac{x}{3}\right)^2=x-\frac{x^2}{9}=\frac{x}{9}(9-x)\geqq 0$$

$\sqrt{36+5x}>0$，$6+\dfrac{x}{3}>0$ であるから　$\sqrt{36+5x}\geqq 6+\dfrac{x}{3}$

(問 4) ② より　$b_{n+1}=\dfrac{5}{\sqrt{36+5a_n}+9}b_n$

$a_n>0$ であるから　$0<\dfrac{5}{\sqrt{36+5a_n}+9}<\dfrac{5}{\sqrt{36}+9}=\dfrac{1}{3}$

(問 2) の結果より，すべての正の整数 n について $b_n>0$ であるから

$$b_{n+1}<\frac{1}{3}b_n\quad\text{ゆえに}\quad\boldsymbol{b_{n+1}\leqq\frac{1}{3}b_n}$$

(問 5) $b_1=9-a_1=8$ および (問 4) の結果より

$$0<b_n\leqq 8\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\qquad\text{ゆえに}\qquad\lim_{n\to\infty}b_n=0$$

$a_n=9-b_n$ であるから　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n=9}$