平成18年度　熊本大学2次試験後期日程 (数学問題)
理学部　平成18年3月12日

1 以下の$\boxed{}$に適当な数を入れよ．

xy 平面上の2点 A$(1,\ 2)$，B$(3,\ \boxed{})$ を通る直線 l_1 の方程式は

$$x+\boxed{}\,y+3=0$$

となる．l_1 に直交し点 C$(3,\ \boxed{})$ を通る直線 l_2 の方程式は

$$\boxed{}\,x+y-6=0$$

となる．三角形 ABC の面積は$\boxed{}$であり，外接円の方程式は

$$(x-\boxed{})^2+(y-\boxed{})^2=\boxed{}$$

となる．放物線 $y=\boxed{}\,x^2+\boxed{}$ は l_1，l_2 と接している．

2 円 $(x-p)^2+(y-q)^2=p^2+q^2+1$ を $C(p,\ q)$ とするとき，次の問いに答えよ．

(問1) $C(p,\ q)$ と x 軸との交点を A，A$'$ とし，$C(p,\ q)$ と y 軸との交点を B，B$'$ とする．AA$'$，BB$'$ を p，q を用いて表せ．

(問2) AA$'=2$BB$'$ であるような $C(p,\ q)$ の中心 $(p,\ q)$ の軌跡は双曲線であることを示せ．また双曲線の頂点の座標と漸近線の方程式を求めよ．

(問3) 点 $(3,\ 4)$ が $C(p,\ q)$ の周上または内部にあるとき，p，q が満たす条件を求めよ．またその条件が表す領域を pq 平面上に図示せよ．

(問4) p，q が (3) の条件を満たすとき，$C(p,\ q)$ の半径の最小値を求めよ．また最小値をとるときの p と q の値を求めよ．

3 以下の問いに答えよ．

(問1) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+4)}$ の和を求めよ．

(問2) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 x\log(x^2+1)\,dx$ の値を求めよ．

(問3) 関数 $(6x-7)e^{2x^3}$ の微分係数が 0 となる x の値を求めよ．

(問4) 曲線 $y=\log(x^2+2x+2)$ の変曲点における接線の方程式を求めよ．

4 $f(x)=(x-\alpha)^2(x-\beta)$ とする．ただし，$\alpha>\beta$ とする．次の問いに答えよ．

(問1) $f(x)$ が極大値をとる x を α，β を用いて表せ．

(問2) $f(x)$ の極大値が 4 となるとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

解答例

$\boxed{\mathbf{1}}$ l_1 は点 A を通るから，l_1 の方程式は　$x+\boxed{-2}\,y+3=0$

点 B は l_1 上の点であるから　B(3, $\boxed{3}$)

l_2 は l_1 に垂直であるから，l_2 の方程式は　$\boxed{2}\,x+y-6=0$

点 C は l_2 上の点であるから　C(3, $\boxed{0}$)

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(3-1,\ 3-2)=(2,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3-1,\ 0-2)=(2,-2)$ であるから

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|2\cdot(-2)-1\cdot 2|=3$$

求める外接円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする．

点 A を通るから　$1^2+2^2+l\cdot 1+m\cdot 2+n=0$
点 B を通るから　$3^2+3^2+l\cdot 3+m\cdot 3+n=0$
点 C を通るから　$3^2+0^2+l\cdot 3+m\cdot 0+n=0$

整理すると

$$\begin{aligned} l+2m+n+5&=0\\ 3l+3m+n+18&=0\\ 3l+n+9&=0 \end{aligned}$$

これを解くと　$l=-5$，$m=-3$，$n=6$
すなわち　$x^2+y^2-5x-3y+6=0$

よって，求める円の方程式は　$\left(x-\mathbf{\frac{5}{2}}\right)^2+\left(y-\mathbf{\frac{3}{2}}\right)^2=\mathbf{\frac{5}{2}}$

l_1，l_2 に接する放物線の方程式を $y=ax^2+q$ とおくと，2 つの 2 次方程式

$$ax^2+q=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2},\qquad ax^2+q=-2x+6$$

はともに重解をもつので

$$2ax^2-x+2q-3=0,\qquad ax^2+2x+q-6=0$$

の係数について

$$(-1)^2-4\cdot 2a(2q-3)=0,\qquad 1^2-a(q-6)=0$$

整理して　$16aq-24a=1$，　$aq-6a=1$

これを解いて　$a=-\dfrac{5}{24}$，$q=\dfrac{6}{5}$

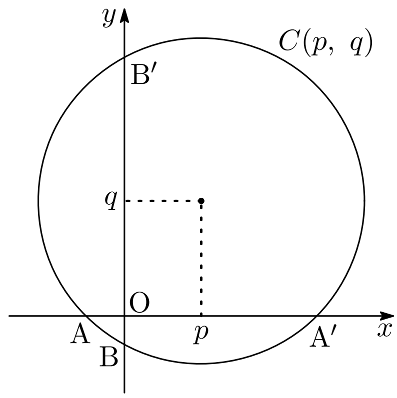
したがって，求める放物線の方程式は　$y=\mathbf{-\frac{5}{24}}x^2+\mathbf{\frac{6}{5}}$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(問 1) A，A′ においては $y=0$ であるから

$$(x-p)^2+(0-q)^2=p^2+q^2+1$$
$$(x-p)^2=p^2+1$$
$$x=p\pm\sqrt{p^2+1}$$

よって　$\mathrm{AA'}=(p+\sqrt{p^2+1})-(p-\sqrt{p^2+1})$
$$=\mathbf{2\sqrt{p^2+1}}$$



同様に，B，B′ においては $x=0$ であるから

$$(0-p)^2+(y-q)^2=p^2+q^2+1$$
$$(y-q)^2=q^2+1$$
$$y=q\pm\sqrt{q^2+1}$$

よって　$\mathrm{BB'}=(q+\sqrt{q^2+1})-(q-\sqrt{q^2+1})=\mathbf{2\sqrt{q^2+1}}$

(問 2) $\mathrm{AA'}=2\mathrm{BB'}$ に (1) の結果を代入して　$\sqrt{p^2+1}=2\sqrt{q^2+1}$

両辺を平方して整理すると　$p^2-4q^2=3$

よって，中心 $(p,\ q)$ の軌跡は，頂点が $\mathbf{(\pm\sqrt{3},\ 0)}$，漸近線が $\boldsymbol{x\pm 2y=0}$ の双曲線

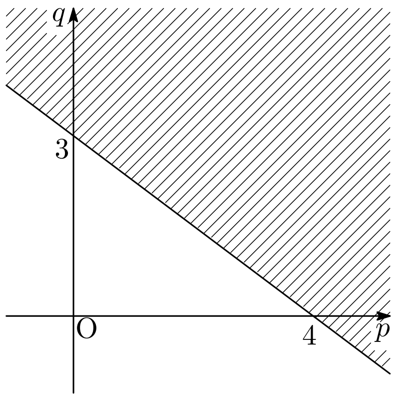
(問 3) $C(p,\ q)$ の周または内部を表す不等式は

$$(x-p)^2+(y-q)^2\leqq p^2+q^2+1$$

点 $(3,\ 4)$ はこの不等式の表す領域内の点であるから

$$(3-p)^2+(4-q)^2\leqq p^2+q^2+1$$

すなわち　$\boldsymbol{q\geqq -\frac{3}{4}p+3}$



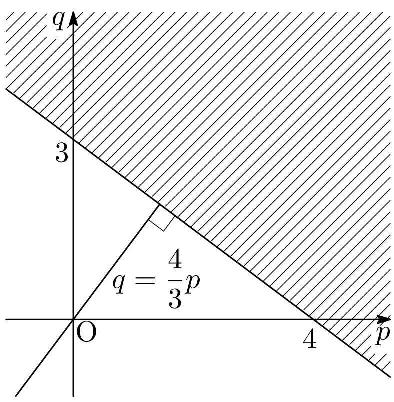
求める領域は，右の図の斜線部分．
ただし境界線を含む．

(問 4) $C(p,\ q)$ の半径は $\sqrt{p^2+q^2+1}$ であるから
この半径が最小となるのは，p^2+q^2 が最小となるときである．

すなわち，原点から領域内の点 $(p,\ q)$ までの距離が最小となるときであるから，

2 直線 $q=-\frac{3}{4}p+3$，$q=\frac{4}{3}p$ の交点を求めて

$(p,\ q)=\left(\mathbf{\frac{36}{25}},\ \mathbf{\frac{48}{25}}\right)$ で



最小値　$\sqrt{\left(\frac{36}{25}\right)^2+\left(\frac{48}{25}\right)^2+1}=\mathbf{\frac{13}{5}}$

$\boxed{\mathbf{3}}$

(問 1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)(n+4)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)(k+4)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{k(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+4)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}-\frac{1}{(n+1)(n+3)}-\frac{1}{(n+2)(n+4)}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{2\cdot4}\right)=\mathbf{\frac{11}{96}}$$

(問 2) $$\int_0^1 x\log(x^2+1)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x^2+1)'\log(x^2+1)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\,(x^2+1)\log(x^2+1)\,\Big]_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1(x^2+1)\times\frac{2x}{x^2+1}\,dx$$
$$=\log 2-\frac{1}{2}\Big[\,x^2\,\Big]_0^1$$
$$=\boldsymbol{\log 2-\frac{1}{2}}$$

(問 3) $f(x)=(6x-7)e^{2x^3}$ とおくと

$$f'(x)=6e^{2x^3}+(6x-7)e^{2x^3}\cdot6x^2$$
$$=6e^{2x^3}\{1+(6x-7)x^2\}$$
$$=6e^{2x^3}(6x^3-7x^2+1)$$
$$=6e^{2x^3}(x-1)(2x-1)(3x+1)$$

$f'(x)=0$ を満たす x の値は　$\boldsymbol{x=1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}}$

(問 4) $y=\log(x^2+2x+2)$ より

$$y'=\frac{2x+2}{x^2+2x+2}$$
$$y''=\frac{(2x+2)'(x^2+2x+2)-(2x+2)(x^2+2x+2)'}{(x^2+2x+2)^2}$$
$$=\frac{2(x^2+2x+2)-(2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x^2+2x+2)}$$

$y''=0$ となる x の値は $x=0,-2$ であるから，変曲点は $(0,\ \log 2)$，$(-2,\ \log 2)$

また，$x=0$ のとき $y'=1$，$x=-2$ のとき $y'=-1$

したがって，変曲点における接線の方程式は

$$y-\log 2=1(x-0),\quad y-\log 2=-1\{x-(-2)\}$$

すなわち　$\boldsymbol{y=x+\log 2,}$　　$\boldsymbol{y=-x-2+\log 2}$

$\boxed{\mathbf{4}}$

(問 1) $f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)$ より

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-\alpha)(x-\beta) + (x-\alpha)^2 \\ &= (x-\alpha)(3x-\alpha-2\beta) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ となる x の値は　$x = \alpha,\ \dfrac{\alpha+2\beta}{3}$

$\dfrac{\alpha+2\beta}{3} < \dfrac{\alpha+2\alpha}{3} = \alpha$ であるから，

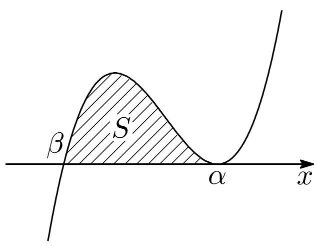
$f(x)$ の増減表は，右のようになる．

したがって，$\boldsymbol{x = \dfrac{\alpha+2\beta}{3}}$ で極大．

x	$\cdots$	$\frac{\alpha+2\beta}{3}$	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

(問 2) $f\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}\right) = 4$ であるから

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha+2\beta}{3}-\alpha\right)^2\left(\frac{\alpha+2\beta}{3}-\beta\right) &= 4 \\ \left(\frac{2\beta-2\alpha}{3}\right)^2\left(\frac{\alpha-\beta}{3}\right) &= 4 \\ \frac{4}{27}(\alpha-\beta)^3 &= 4 \end{aligned}$$



したがって　　$\alpha - \beta = 3$

求める面積を S は

$$\begin{aligned} S &= \int_\beta^\alpha (x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx \\ &= \int_\beta^\alpha (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}\,dx \\ &= \int_\beta^\alpha \{(x-\alpha)^3-(\beta-\alpha)(x-\alpha)^2\}\,dx \\ &= \left[\ \frac{(x-\alpha)^4}{4} - \frac{(\beta-\alpha)(x-\alpha)^3}{3}\ \right]_\beta^\alpha \\ &= -\frac{(\beta-\alpha)^4}{4} + \frac{(\beta-\alpha)^4}{3} \\ &= \frac{(\alpha-\beta)^4}{12} = \frac{3^4}{12} = \boldsymbol{\frac{27}{4}} \end{aligned}$$