平成23年度　熊本県立大学　環境共生学部(環境資源・居住環境)
一般第二次試験問題　数学(平成23年2月25日)

問題 I $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を行列 J と定めるとき，行列 J^{2011} を求めなさい。

問題 II 正しく作られたさいころ1個を3回振るとき，2の目と3の目の両方が出る確率を求めなさい。

問題 III 正の数 α，β，a，b が $2\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{4}$，$\tan\alpha = \dfrac{1}{a}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{b}$ を満たすとき，a を用いて b を表わしなさい。

解答例

問題 I

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

よって　$J^{2011} = (J^2)^{1005}J = (-E)^{1005}J = -J = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

問題 II 1個のさいころを3回振るとき，次の3つの場合に分けて求める．

［1］2の目が2回と3の目が1回出る確率は

$$_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{3}{6^3}$$

［2］2の目が1回と3の目が2回出る確率は

$$_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^6 = \frac{3}{6^3}$$

［3］2の目と3の目と2,3以外の目が1回ずつ出る確率は

$$3! \times 4 \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{24}{6^3}$$

［1］〜［3］は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{3}{6^3} + \frac{3}{6^3} + \frac{24}{6^3} = \frac{30}{6^3} = \mathbf{\frac{5}{36}}$$

問題 III $\tan\alpha = \dfrac{1}{a}$ より

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\times\frac{1}{a}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \frac{2a}{a^2-1}$$

$2\alpha+\beta = \dfrac{\pi}{4}$ より，$\beta = \dfrac{\pi}{4} - 2\alpha \cdots$ ① であるから

$$\tan\beta = \tan\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)$$

$$\frac{1}{b} = \frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan 2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan 2\alpha} = \frac{1-\frac{2a}{a^2-1}}{1+1\cdot\frac{2a}{a^2-1}} = \frac{a^2-2a-1}{a^2+2a-1}$$

したがって　$b = \dfrac{a^2+2a-1}{a^2-2a-1}$

ここで，$\alpha > 0$，$\beta > 0$ であるから，① より　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{8}$

したがって　$0 < \tan\alpha < \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$

ゆえに　$0 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$　すなわち　$a > \sqrt{2}+1$

よって　$\boldsymbol{b = \dfrac{a^2+2a-1}{a^2-2a-1} \quad (a > \sqrt{2}+1)}$