平成 22 年度　熊本県立大学　環境共生学部 (環境資源・居住環境)
一般第二次試験問題　数学 (平成 22 年 2 月 25 日)

問題 I 関数 $y = x^2 - 4ax + 7$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ の最小値とそのときの x の値を求めなさい。

問題 II 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ が $S_n = 5^n - 1$ と表されるとき，この数列の一般項を求めなさい。

問題 III $0 \leqq r \leqq l$ のとき，円 $(x-m)^2 + (y-l)^2 = r^2$ によって囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めなさい。

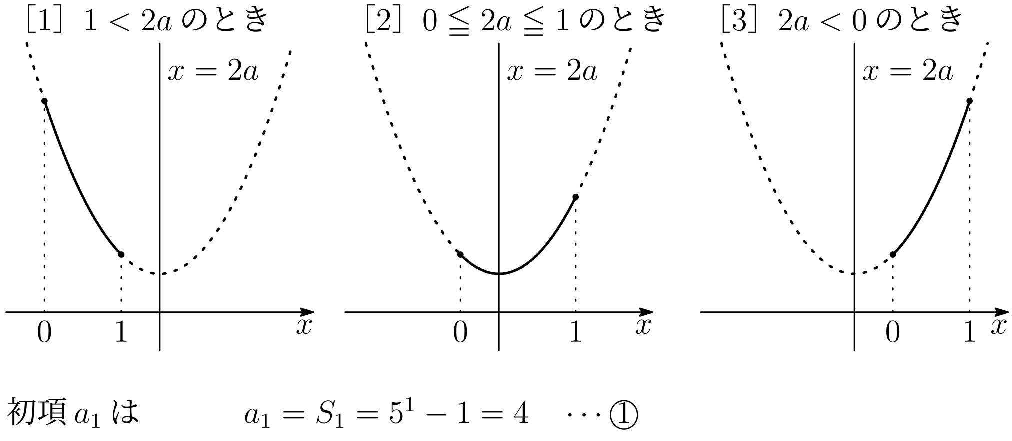
解答例

問題 I $y = x^2 - 4ax + 7$ の右辺を変形すると　$y = (x-2a)^2 - 4a^2 + 7$

［1］$1 < 2a$　すなわち　$\dfrac{1}{2} < a$ のとき
　$\boldsymbol{x = 1}$ で**最小値** $\boldsymbol{-4a + 8}$ をとる

［2］$0 \leqq 2a \leqq 1$　すなわち　$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき
　$\boldsymbol{x = 2a}$ で**最小値** $\boldsymbol{-4a^2 + 7}$ をとる

［3］$2a < 0$　すなわち　$a < 0$ のとき
　$\boldsymbol{x = 0}$ で**最小値** $\boldsymbol{7}$ をとる

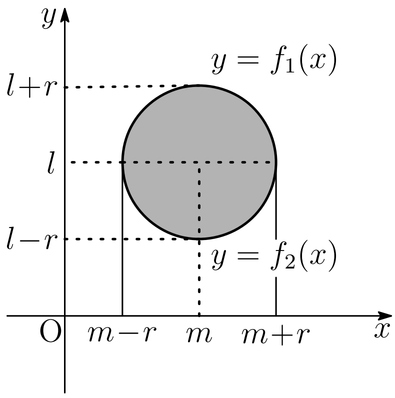


問題 II 初項 a_1 は　　$a_1 = S_1 = 5^1 - 1 = 4$　$\cdots$①
$n \geqq 2$ のとき　　$a_n = S_n - S_{n-1} = (5^n - 1) - (5^{n-1} - 1)$
すなわち　　$a_n = 4 \cdot 5^{n-1}$

① より $a_1 = 4$ なので，この式は $n = 1$ のときにも成り立つ.

したがって，一般項は　　$\boldsymbol{a_n = 4 \cdot 5^{n-1}}$

問題 III $(x-m)^2+(y-l)^2=r^2$ を y について解くと



$$y=l\pm\sqrt{r^2-(x-m)^2}$$

ここで

$$f_1(x)=l+\sqrt{r^2-(x-m)^2}$$
$$f_2(x)=l-\sqrt{r^2-(x-m)^2}$$

とおく．

半円 $y=f_1(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=m-r$，$x=m+r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_1，半円 $y=f_2(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=m-r$，$x=m+r$ で囲まれた部分が x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とすると

$$V_1=\pi\int_{m-r}^{m+r}\{f_1(x)\}^2\,dx,\quad V_2=\pi\int_{m-r}^{m+r}\{f_2(x)\}^2\,dx$$

よって，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}V=V_1-V_2&=\pi\int_{m-r}^{m+r}\{f_1(x)+f_2(x)\}\{f_1(x)-f_2(x)\}\,dx\\&=\pi\int_{m-r}^{m+r}2l\times2\sqrt{r^2-(x-m)^2}\,dx\\&=4\pi l\int_{m-r}^{m+r}\sqrt{r^2-(x-m)^2}\,dx=4\pi l\times\frac{\pi r^2}{2}=\boldsymbol{2\pi^2r^2l}\end{aligned}$$

パップス-ギュルダンの定理 (Pappus-Guldinus theorem)

一般に，$a\leqq x\leqq b$ において $f_1(x)\geqq f_2(x)\geqq 0$ である 2 曲線 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形の面積を S，その重心の y 座標を l とすると

$$lS=\int_a^b\frac{f_1(x)+f_2(x)}{2}\times\{f_1(x)-f_2(x)\}\,dx$$

この図形を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は

$$V=\pi\int_a^b\{f_1(x)+f_2(x)\}\{f_1(x)-f_2(x)\}\,dx$$

よって，上の 2 式から　　$V=2\pi lS$

回転体の体積は，(回転による重心の軌跡の長さ) × (面積) である．