平成21年度　熊本県立大学　環境共生学部(環境資源・居住環境)
一般第二次試験問題　数学(平成21年2月25日)

問題 I $\triangle$ABC において，AB $= 4$，BC $= 5$，CA $= 6$ のとき，以下の各問に答えよ。

1) $\triangle$ABC の面積を求めよ。
2) $\triangle$ABC に外接する円の面積を求めよ。
3) $\triangle$ABC を底面とする三角柱の 5 つの面すべてに球が内側から接しているとき，この三角柱の高さを求めよ。

問題 II $a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2a_n + 4\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$ で与えられた数列 $\{a_n\}$ について，以下の各問に答えよ。

1) a_2，a_3，a_4 の値を求めよ。
2) 数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とするとき，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。
3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

問題 III
1) 関数 $y = x^2e^{-x}$ を微分せよ。
2) 関数 $y = x^2e^{-x}$ のグラフをかけ。
3) 曲線 $C : y = x^2e^{-x}$ は，原点以外の点において，直線 $l : y = kx$ に接している。ただし，k は 0 でない実数である。このとき，k の値と接点を求めよ。

解答例

問題 I 1) $a=5$，$b=6$，$c=4$ であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{6^2+4^2-5^2}{2\cdot6\cdot4}=\frac{27}{2\cdot6\cdot4}=\frac{9}{16}$$

$\sin A>0$ であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{9}{16}\right)^2}=\frac{5\sqrt{7}}{16}$$

よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot6\cdot4\cdot\frac{5\sqrt{7}}{16}=\boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{4}}$$

2) △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理により

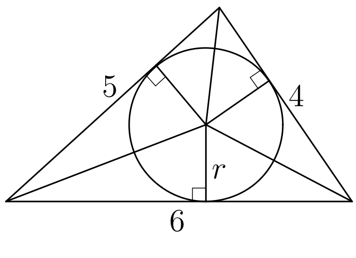
$$2R=\frac{a}{\sin A}$$

ゆえに　$R=\dfrac{1}{2}\times5\div\dfrac{5\sqrt{7}}{16}=\dfrac{8}{\sqrt{7}}$

よって，求める △ABC の外接円の面積は

$$\pi R^2=\pi\left(\frac{8}{\sqrt{7}}\right)^2=\boldsymbol{\frac{64}{7}\pi}$$

3) 球の中心を通り底面に平行な平面で三角柱を切ったとき，切り口は右の図のようになる．球の半径を r とすると，△ABC の面積 S は



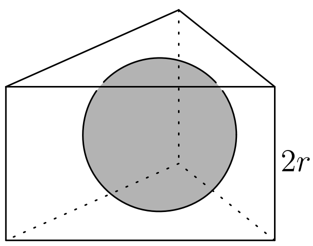
$$S=\frac{1}{2}\cdot4r+\frac{1}{2}\cdot5r+\frac{1}{2}\cdot6r=\frac{15}{2}r$$

1) の結果から　$\dfrac{15}{2}r=\dfrac{15\sqrt{7}}{4}$

これを解いて　$r=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

よって，三角柱の高さは

$$2r=2\times\frac{\sqrt{7}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{7}}$$



問題 II 1) $a_2 = 2a_1 + 4 = 2{\cdot}2 + 4 = \mathbf{8}$

$a_3 = 2a_2 + 4 = 2{\cdot}8 + 4 = \mathbf{20}$

$a_4 = 2a_3 + 4 = 2{\cdot}20 + 4 = \mathbf{44}$

2) $a_{n+1} = 2a_n + 4 \quad \cdots ①$

① より $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 4 \quad \cdots ②$

も成り立つ．② − ① から $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

ここで，$a_{n+2} - a_{n+1} = b_{n+1}$，$a_{n+1} - a_n = b_n$ であるから

$$b_{n+1} = 2b_n$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列で，初項は

$$b_1 = a_2 - a_1 = 8 - 2 = 6$$

数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boldsymbol{6{\cdot}2^{n-1}}$$

3) 2) の結果から，$n \geqq 2$ のとき

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 6{\cdot}2^{k-1} = 2 + \frac{6(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 6{\cdot}2^{n-1} - 4$$

初項は，$a_1 = 2$ なので，上の a_n は $n = 1$ のときも成り立つ．

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$\boldsymbol{a_n = 6{\cdot}2^{n-1} - 4}$$

4) 3) の結果から

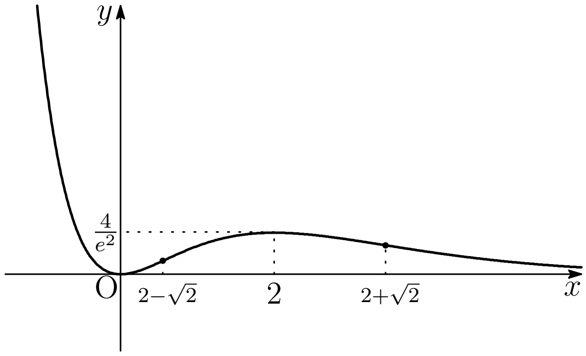
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (6{\cdot}2^{k-1} - 4) = \frac{6(2^n - 1)}{2 - 1} - 4n$$

$$= \boldsymbol{6{\cdot}2^n - 4n - 6}$$

問題 III 1) $y' = 2xe^{-x} + x^2\cdot(-e^{-x}) = \boldsymbol{(2x - x^2)e^{-x}}$

2) $y'' = (2-2x)e^{-x} + (2x - x^2)\cdot(-e^{-x}) = (x^2 - 4x + 2)e^{-x}$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↘	極小 0	↗	変曲点	↗	極大 $\frac{4}{e^2}$	↘	変曲点	↘



3) 接点の座標を $(t,\ t^2e^{-t})$ とおくと $(t \neq 0)$，この点において直線 $y = kx$ に接しているので，接点の y 座標および接線の傾きから

$$kt = t^2e^{-t},\quad k = (2t - t^2)e^{-t}$$

上の 2 式から k を消去して整理すると

$$(t^3 - t^2)e^{-t} = 0$$

$t \neq 0$ であるから　　$t = 1$

よって　　$\boldsymbol{k = \frac{1}{e}}$，**接点** $\boldsymbol{\left(1,\ \frac{1}{e}\right)}$