平成 20 年度　熊本県立大学　環境共生学部居住環境学専攻 一般第二次試験問題　数学 (平成 20 年 2 月 25 日)

問題 I 2 次方程式 $2x^2 + kx + 5 = 0$ の解のひとつが $x = -1$ であるとき，定数 k の値と他の解を求めよ。

問題 II 問 1　さいころを 2 回投げるとき，出る目の和が 3 となる確率を求めよ。

問 2　さいころを 2 回投げるとき，出る目の和が 4 となる確率を求めよ。

問 3　さいころを 3 回投げるとき，出る目の和が 5 となる確率を求めよ。

問題 III $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ に関する以下の各問に答えよ。

問 1　$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

問 2　$f(a) = 0$，$1 < a < 2$ を満たす実数 a がひとつだけ存在することを示せ。

問 3　問 2 の a について，3 次関数 $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ が $g\left(-\dfrac{1}{a}\right) = 0$ を満たすように，b，c，d の値を求めよ。

問題 IV 問 1　原点の周りの角度 θ の回転を表す行列 F を求めよ。

問 2　任意の点を直線 $y = \sqrt{3}x$ について対称な点に移す一次変換を表す行列 G を求めよ。

問 3　行列 FG の表す一次変換により点 $\mathrm{Q}(1,\ 0)$ が点 Q_1 に移り，行列 GF の表す一次変換により点 $\mathrm{Q}(1,\ 0)$ が点 Q_2 に移るとする。2 点 Q_1，Q_2 の座標を求めよ。

問 4　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，点 Q_1 と点 Q_2 の間の距離の最大値と最小値を求めよ。

解答例

問題 I -1 がこの方程式の解であるから

$$2\cdot(-1)^2 + k\cdot(-1) + 5 = 0$$

これを解くと　$\boldsymbol{k = 7}$

このとき，方程式は　$2x^2 + 7x + 5 = 0$

左辺を因数分解すると　$(x+1)(2x+5) = 0$

よって，他の解は　$\boldsymbol{x = -\frac{5}{2}}$

問題 II 2 回投げるときのさいころの目の出方は　6^2 (通り)

3 回投げるときのさいころの目の出方は　6^3 (通り)

問 1　さいころを 2 回投げるとき，目の和が 3 となるのは，以下の 2 通り

1 回目	1	2
2 回目	2	1

よって，求める確率は　$\frac{2}{6^2} = \boldsymbol{\frac{1}{18}}$

問 2　さいころを 2 回投げるとき，目の和が 4 となるのは，以下の 3 通り

1 回目	1	2	3
2 回目	3	2	1

よって，求める確率は　$\frac{3}{6^2} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$

問 3　さいころを 3 回投げるとき，目の和が 5 となるのは，以下の 6 通り

1 回目	1	1	1	2	2	3
2 回目	1	2	3	1	2	1
3 回目	3	2	1	2	1	1

よって，求める確率は　$\frac{6}{6^3} = \boldsymbol{\frac{1}{36}}$

問題 III 問 1 $f(x)$ を微分して　$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 4x + 1}$

問 2 (1) の結果から　$f'(x) = (x-1)(3x-1)$

$1 < x < 2$ において，$f'(x) > 0$ であるから，$f(x)$ はこの区間で単調増加である．また，$f(1) = -1 < 0$，$f(2) = 1 > 0$ であるから

$$f(a) = 0,\quad 1 < a < 2$$

を満たす実数 a が 1 つだけ存在する．

問 3 $g(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ の係数が実数であれば，$g\left(-\dfrac{1}{a}\right) = 0$ から

$$\left(-\frac{1}{a}\right)^3 + b\left(-\frac{1}{a}\right)^2 + c\left(-\frac{1}{a}\right) + d = 0$$

ゆえに　$$-1 + ab - a^2c + a^3d = 0 \quad \cdots ①$$

を満たす b，c，d であればよいので，b，c，d の組は無数に存在する．

注意

$f(a) = 0$ より　$a^3 - 2a^2 + a - 1 = 0$

$a \neq 0$ であるから　$1 - \dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{a^3} = 0$

ゆえに　$\left(-\dfrac{1}{a}\right)^3 + \left(-\dfrac{1}{a}\right)^2 + 2\left(-\dfrac{1}{a}\right) + 1 = 0$

これから $g(x) = x^3 + x^2 + 2x + 1$ とするのは早計である．

そこで，**$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ は有理数**であるという条件で解くことにする．

問 2 の結果から

$$a^3 - 2a^2 + a - 1 = 0 \quad \cdots ②$$
$$a(a-1)^2 = 1 \quad \cdots ③$$

を満たす a $(1 < a < 2)$ が無理数であること背理法により示す．

整数 m，n を用いて (m，n は互いに素)，$a = \dfrac{m}{n}$ と表すことができると仮定すると，これを ③ に代入して

$$\frac{m}{n}\left(\frac{m}{n} - 1\right)^2 = 1$$
$$m(m-n)^2 = n^3 \quad \cdots ④$$

n が奇数のとき，④ より m，$m-n$ がともに奇数となるが，これを満たす m，n はない．

n が偶数のとき，m は奇数であるから，$m-n$ は奇数となるので，④ に反する．

ゆえに，a は無理数である．

② より　$a^3 = 2a^2 - a + 1$
これを ① に代入して

$$(2d-c)a^2 + (b-d)a + d - 1 = 0 \quad \cdots ⑤$$

また，① − ② より $(d-1)a^3 + (2-c)a^2 + (b-1)a = 0$
さらに，$a \neq 0$ から

$$(d-1)a^2 + (2-c)a + b - 1 = 0 \quad \cdots ⑥$$

[1] $\underline{d-1=0 \text{ のとき}}$，⑥ より　$(2-c)a + b - 1 = 0$
a は無理数，$2-c$，$b-1$ は有理数であるから

$$2-c=0,\ b-1=0$$

よって　　$b=1,\ c=2,\ d=1$

[2] $\underline{d-1 \neq 0 \text{ のとき}}$
⑤ $\times (d-1) -$ ⑥ $\times (2d-c)$ より
$\{(d-1)(b-d)-(2d-c)(2-c)\}a+(d-1)^2-(2d-c)(b-1)=0$
a は無理数，b，c，d は有理数であるから

$$(d-1)(b-d)-(2d-c)(2-c)=0 \quad \cdots ⑦$$
$$(d-1)^2-(2d-c)(b-1)=0 \quad \cdots ⑧$$

⑧ において，$d-1 \neq 0$ であるから，$2d-c \neq 0$，$b-1 \neq 0$

⑦ において，$2-c=0$ とすると，$b-d=0$ となり，⑥ は

$$(d-1)(a^2+1)=0$$

これは，$d-1 \neq 0$，a は無理数に反するので　$2-c \neq 0$
さらに，$2d-c \neq 0$ であるから，⑦ より　$b-d \neq 0$
よって，⑦，⑧ から

$$\frac{2d-c}{d-1} = \frac{b-d}{2-c} = \frac{d-1}{b-1}$$

ここで，$b-1=p$，$2-c=q$，$d-1=r$ とおくと，p，q，r は，0 でない有理数である．上式の値を k すると

$$\frac{q+2r}{r} = \frac{p-r}{q} = \frac{r}{p} = k \quad \cdots ⑨$$

$\underline{p+q=0 \text{ のとき}}$

$$\frac{p-r}{q} = \frac{p-r}{-p} = -1 + \frac{r}{p} \neq \frac{r}{p}$$

となるので，⑨ に反する．

$\underline{p+q \neq 0}$ のとき，⑨ に加比の理を適用して

$$k = \frac{(p-r)+r}{q+p} = \frac{p}{p+q} \quad \cdots ⑩$$

⑩ を $\frac{r}{p} = k$ に代入して　$r = \frac{p^2}{p+q} \quad \cdots ⑪$

⑨ から　$\frac{q+2r}{r} = k$

これに ⑩，⑪ を代入して

$$\frac{q + 2 \times \frac{p^2}{p+q}}{\frac{p^2}{p+q}} = \frac{p}{p+q}$$

ゆえに　$\frac{2p^2+pq+q^2}{p^2} = \frac{p}{p+q}$

これを整理すると　$p^3+3p^2q+2pq^2+q^3=0$

$q \neq 0$ であるから

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 + 3\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 1 = 0 \quad \cdots ⑫$$

$\frac{p}{q}$ は有理数であるから，3 次方程式

$$x^3+3x^2+2x+1=0 \quad \cdots ⑬$$

が，有理数の解 $\frac{u}{v}$ (u, v は互いに素である整数) をもたなければならない．

ゆえに　$\left(\frac{u}{v}\right)^3 + 3\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 2\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 1 = 0$

$$u^3+3u^2v+2uv^2+v^3=0$$

整理して　$(u+v)^3 = uv^2$

上式において，u，v がともに奇数のとき，u，v の一方が奇数で他方が偶数のとき，そのいずれにおいても成り立たない．
したがって，方程式 ⑬ は有理数の解をもたない．
ゆえに，有理数 b，c，d は存在しない．

よって，求める有理数 b，c，d は　$\boldsymbol{b=1,\ c=2,\ d=1}$

問題 IV 問 1 $F = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\cos\theta} & \boldsymbol{-\sin\theta} \\ \boldsymbol{\sin\theta} & \boldsymbol{\cos\theta} \end{pmatrix}$

問 2 $\vec{u} = (1,\ \sqrt{3})$，$\vec{v} = (-\sqrt{3},\ 1)$ とおく．

$\vec{u}$，$\vec{v}$ は，それぞれ直線 $y = \sqrt{3}\,x$ の方向ベクトルと法線ベクトルであるから，G によって

$$G\vec{u} = \vec{u}, \qquad G\vec{v} = -\vec{v}$$

ゆえに　$G\begin{pmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{u} & -\vec{v} \end{pmatrix}$

よって　$G\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

行列 $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ は，正則であるから

$$\begin{aligned} G &= \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

問 3 Q_1 は，FG による Q の像であるから

$$\begin{aligned} FG\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta \\ -\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Q_2 は，GF による Q の像であるから

$$GF\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta\\ \sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta\end{pmatrix}$$

よって　$\mathbf{Q_1}\left(-\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}{2},\ \dfrac{-\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}{2}\right)$

$\mathbf{Q_2}\left(\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta}{2},\ \dfrac{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}{2}\right)$

問 4 問 3 の結果から，　$\overrightarrow{Q_1Q_2}=\sin\theta(\sqrt{3},\ 1)$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ であるから　$Q_1Q_2=2\sin\theta$

したがって，点 Q_1 と点 Q_2 間の距離は，

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値 2，　$\theta=0$ のとき最小値 0