平成19年度　熊本県立大学　環境共生学部居住環境学専攻 一般第二次試験問題　数学 (平成19年2月25日)90分

問題 I $\displaystyle\int_1^e \log x\,dx$ の値を求めよ。ただし，e は自然対数の底であり，$\log$ は自然対数を表す。

問題 II 正の整数 n に対して

$$T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n},\quad S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \cdots + \frac{n}{2^n}$$

とする。以下の各問に答えよ。

問 1 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n$ の値を求めよ。

問 2 S_n を T_n と n を使った式で表せ。

問 3 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ の値を求めよ。ただし，ここで $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$ を利用してよい。

問題 III 問 1 $\cos 75^\circ$ の値を求めよ。

問 2 $\tan 75^\circ$ の値を計算せよ。

問 3 一辺の長さが 1 の正 12 角形の面積を求めよ。

問題 IV 問 1 x^3 を x^2+1 で割った余りを求めよ。

問 2 x^4 を x^2+1 で割った余りを求めよ。

問 3 $x^{19}+x$ を x^2+1 で割った余りを求めよ.

解答例

問題 I (部分積分を用いる)

$$\begin{aligned}\int_1^e \log x\,dx &= \int_1^e (x)'\log x\,dx \\ &= \Big[\,x\log x\,\Big]_1^e - \int_1^e x(\log x)'\,dx \\ &= e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx \\ &= e - \Big[\,x\,\Big]_1^e = \mathbf{1}\end{aligned}$$

問題 II 問 1 T_n は初項が $\frac{1}{2}$，公比が $\frac{1}{2}$ の等比数列の初項から第 n 項までの和であるから

$$T_n = \frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

したがって　$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} T_n = 1}$

問 2

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n} \\ \frac{1}{2}S_n &= \qquad\ \frac{1}{4}+\frac{2}{8}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}+\frac{n}{2^{n+1}}\end{aligned}$$

の辺々を引くと

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2^{n+1}}$$

ゆえに　$\frac{1}{2}S_n = T_n - \frac{n}{2^{n+1}}$　よって　$\boldsymbol{S_n = 2T_n - \frac{n}{2^n}}$

問 3 $\lim_{n\to\infty} T_n = 1$ および $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n} = 0$ なので，問 2 の結果から

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2T_n - \frac{n}{2^n}\right) = 2\times 1 - 0 = \mathbf{2}$$

問題 III 問 1 $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$

$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

問 2 $\tan 75^\circ = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \dfrac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{2 + \sqrt{3}}$$

問 3 円の中心と正十二角形の各頂点を結ぶと，面積の等しい 12 個の二等辺三角形ができる．この二等辺三角形の頂角は 30° である．

よって，正十二角形の面積は

$$12 \times \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin 30^\circ \right) = 12 \times \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \mathbf{12}$$

問題 IV 問 1

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x^2 + 1 & x^3 \\ & x^3 \quad +x \\ \hline & \qquad -x \end{array}$$

(答) **余りは $\boldsymbol{-x}$**

問 2

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \qquad -1 \\ \hline x^2 + 1 & x^4 \\ & x^4 \quad +x^2 \\ \hline & \qquad -x^2 \\ & \qquad -x^2 \quad -1 \\ \hline & \qquad\qquad 1 \end{array}$$

(答) **余りは 1**

問 3 $x^{19} + x$ を 2 次式 $x^2 + 1$ で割った余りを $ax + b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると，次の等式が成り立つ．

$$x^{19} + x = (x^2 + 1)Q(x) + ax + b$$

この等式に $x = i$ を代入すると　　$0 = ai + b$

a，b は実数であるから　　$a = 0$，$b = 0$

よって，求める**余りは　0**