熊本県立技術短期大学校

推薦入学(前期)試験問題

数学I(90分)

平成23年9月25日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙及び答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。

平成 24 年度　熊本県立技術短期大学校推薦 (前期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)^2$ を整理すると，$\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}\times\sqrt{10}$ となる。

(2) 2 次方程式 $2x^2+5\sqrt{3}x-9=0$ の解は，$x=\boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $a-2b=x$，$ab=y$ とおく。次の式を x，y で表すと，$a^2+4b^2=\boxed{\text{オ}}$，$a^3-8b^3=\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) $a>0$ のとき，$\begin{cases} 2x-a<-3ax-2b \\ -x+2a<x-3b \end{cases}$ をみたす x の範囲が $-\dfrac{5}{2}<x<1$ であるならば，$a=\boxed{\text{キ}}$，$b=\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta=\boxed{\text{ケ}}$，$\tan\theta=\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) 周の長さ 16cm，面積 15cm^2 の長方形の隣り合う 2 辺の長さは $\boxed{\text{サ}}$ cm と $\boxed{\text{シ}}$ cm である。

(2) 2 次曲線 $y=2x^2-4x+5$ の $-1\leqq x\leqq 2$ における最大値は $\boxed{\text{ス}}$，最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) $6x^2-x-1=0$ の 2 つの解の逆数が 2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解であるとき，$a=\boxed{\text{ソ}}$，$b=\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) 点 A$(-2,\ 0)$ を通る直線 ℓ と y 軸との交点を B とする。原点を O とするとき，$\angle\mathrm{BAO}=60^\circ$ ならば，ℓ の方程式は $y=\boxed{\text{チ}}x+\boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) 1 辺の長さが 2 の正六角形 ABCDEF の内角の和は $\boxed{\text{テ}}^\circ$ である。この正六角形の中心より辺 AB に下ろした垂線の長さは $\boxed{\text{ト}}$ である。

[3] x，y は負でない整数で，等式 $x^2(x^2+4)+y^2(y^2-4)=2x^2y^2-3$ をみたすとする。$x^2-y^2=t$ とおいて，この等式を t で表すと $\boxed{\text{ナ}}=0$ となる。したがって，x^2-y^2 の値は $\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$ である。このことから，等式をみたす x，y の組 $(x,\ y)$ は $\boxed{\text{ネ}}$，$\boxed{\text{ノ}}$ である。

[4] $\triangle$ABC において $\angle\mathrm{B}=30^\circ$，$\mathrm{BC}=\sqrt{3}$，$\mathrm{AC}=\sqrt{7}$ ならば，$\mathrm{AB}=\boxed{\text{ハ}}$ であるから，$\triangle$ABC の面積 S_1 は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。辺 BC 上に $\mathrm{BE}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ となる点 E をとる。辺 AB 上に点 D をとり，$\triangle$DBE の面積を S_2 とするとき，$\dfrac{1}{3}S_1<S_2<\dfrac{1}{2}S_1$ が成り立つのは $\boxed{\text{フ}}<\mathrm{BD}<\boxed{\text{ヘ}}$ のときである。

解答例

[1] (1)

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{2})}{(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2})} = \frac{5+\sqrt{10}}{3}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{3}+2+3 = \frac{16}{3}$$

したがって

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}\right)^2 = \frac{5+\sqrt{10}}{3} + \frac{16}{3} = \mathbf{7} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \times \sqrt{\mathbf{10}}$$

(答) ア. 7　イ. $\frac{1}{3}$

(2) 解の公式により

$$x = \frac{-5\sqrt{3} \pm \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - 4\cdot 2\cdot(-9)}}{2\cdot 2} = \frac{-5\sqrt{3} \pm \sqrt{147}}{4}$$

$$= \frac{-5\sqrt{3} \pm 7\sqrt{3}}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2},\ \ -3\sqrt{3}}$$

(答) ウ. エ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-3\sqrt{3}$

(3)

$$\begin{aligned} a^2+4b^2 &= a^2-4ab+4b^2+4ab \\ &= (a-2b)^2+4ab \\ &= \boldsymbol{x^2+4y} \end{aligned}$$

この結果から

$$\begin{aligned} a^3-8b^3 &= a^3-(2b)^3 \\ &= (a-2b)\{a^2+a\cdot 2b+(2b)^2\} \\ &= (a-2b)\{(a^2+4b^2)+2ab\} \\ &= x\{(x^2+4y)+2y\} = \boldsymbol{x(x^2+6y)} \end{aligned}$$

(答) オ. x^2+4y　カ. $x(x^2+6y)$

(4) 第 1 式より $(3a+2)x < a-2b$

$3a+2>0$ であるから $x < \dfrac{a-2b}{3a+2}$ $\cdots$ ①

第 2 式より $-2x < -2a-3b$

ゆえに $x > \dfrac{2a+3b}{2}$ $\cdots$ ②

①，② の共通範囲が $-\dfrac{5}{2} < x < 1$ であるから

$$\frac{2a+3b}{2} = -\frac{5}{2}, \quad \frac{a-2b}{3a+2} = 1$$

したがって $2a+3b=-5$，$a+b=-1$

これを解いて $\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=-3}$

(答) キ. 2　ク. -3

(5) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ から

$$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\cos\theta \leqq 0$ であるから

$$\cos\theta = -\sqrt{\frac{8}{9}} = \boldsymbol{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

また $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{1}{3} \div \left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$

(答) ケ. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　コ. $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

[2] (1) 2 辺の長さを x cm，y cm とする．

周の長さから　　$x+y=8$

面積から　　　　$xy=15$

x，y を解とする t に関する 2 次方程式は

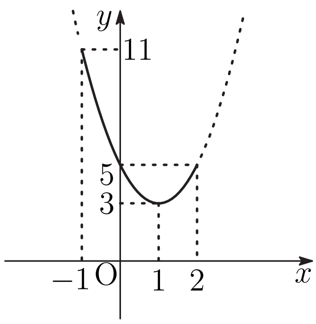
$$t^2-(x+y)t+xy=0 \quad \text{すなわち} \quad t^2-8t+15=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{t=3,\ 5}$

(答) サ．シ．3，5

(2) $y=2x^2-4x+5$ を変形すると

$$y=2(x-1)^2+3$$



$-1 \leqq x \leqq 2$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，y は

$x=-1$ で最大値 11 をとり，

$x=1$ で最小値 3 をとる．

(答) ス．11　セ．3

(3) 2 次方程式 $6x^2-x-1=0$ の解は $\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{3}$

この 2 数の逆数 2，-3 を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$x^2-\{2+(-3)\}x+2\cdot(-3)=0 \quad \text{すなわち} \quad x^2+x-6=0$$

よって，係数を比較して　　$\boldsymbol{a=1,\ b=-6}$

(答) ソ．1　タ．-6

(4) ℓ は，点 A$(-2,\ 0)$ を通り，傾き $\pm\tan 60^\circ$ の直線であるから

$$y=\pm\sqrt{3}(x+2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=\pm\sqrt{3}\,x\pm 2\sqrt{3}} \quad (\text{複号同順})$$

(答) チ．$\pm\sqrt{3}$　ツ．$\pm 2\sqrt{3}$　(複号同順)

直線 ℓ は，2 本存在するので，センター試験のように

$$y=\boxed{}\,x+\boxed{}, \quad y=-\boxed{}\,x-\boxed{}$$

とすべきであった．

(5) 六角形の内角の和は　　$(6-2)\times 180^\circ = \mathbf{720^\circ}$

正六角形の中心を O とすると，△OAB は正三角形であるから，求める垂線の長さは

$$2\sin 60^\circ = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(答) テ．720　ト．$\sqrt{3}$

[3] 与式を整理すると　$x^4-2x^2y^2+y^4+4x^2-4y^2+3=0$

ゆえに　$(x^2-y^2)^2+4(x^2-y^2)+3=0$

$x^2-y^2=t$ とおくと　$\boldsymbol{t^2+4t+3=0}$

これを解いて　$\boldsymbol{t=-1,-3}$

したがって　$(x+y)(x-y)=-1,-3$

x，y は負でない整数であるから，$x+y \geqq 0$ に注意して

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-1 \end{cases},\quad \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-3 \end{cases},\quad \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=-1 \end{cases}$$

第 2 式は $x=-1$ となり，不適．したがって，第 1，第 3 式を解いて

$$\boldsymbol{(x,\ y)=(0,\ 1),\ (1,\ 2)}$$

(答) ナ．t^2+4t+3　ニ．ヌ．$-1,-3$　ネ．ノ．$(0,\ 1),\ (1,\ 2)$

[4] 余弦定理 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ により

$$(\sqrt{7})^2=c^2+(\sqrt{3})^2-2c\cdot\sqrt{3}\cos 30^\circ \quad \text{すなわち} \quad c^2-3c-4=0$$

$c>0$ に注意して，これを解くと　$c=4$　ゆえに　$\mathbf{AB=4}$

したがって，△ABC の面積 S_1 は

$$S_1=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{3}\sin 30^\circ=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

$\mathrm{BD}=x$ とすると，△DBE の面積 S_2 は

$$S_2=\frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{BE}\sin B=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 30^\circ=\frac{x}{2\sqrt{3}}$$

上の諸式を $\frac{1}{3}S_1<S_2<\frac{1}{2}S_1$ に代入すると

$$\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{x}{2\sqrt{3}}<\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{2<x<3}$$

(答) ハ．4　ヒ．$\sqrt{3}$　フ．2　ヘ．3