熊本県立技術短期大学校

推薦入学(前期)試験問題

数学I(90分)

平成22年9月26日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙及び答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

平成23年度　熊本県立技術短期大学校推薦 (前期) 入学選抜試験
数学問題 (90分)

[1] (1) $(x^2+2x-1)(x^2+2x+2)$ を展開すると x^3 の係数は $\boxed{ア}$，x^2 の係数は $\boxed{イ}$ となる。

(2) $(n+m\sqrt{3})(1+\sqrt{3})=3-\sqrt{3}$ をみたす整数 m，n は $m=\boxed{ウ}$，$n=\boxed{エ}$ である。

(3) 連立不等式 $5x+3 \leqq 2x+4$，$2x-3 \leqq 4x+5$ をみたす x の範囲は $\boxed{オ} \leqq x \leqq \boxed{カ}$ である。

(4) 2点 A$(-1,\ 2)$，B$(3,\ 4)$ に対して，x 軸に関して点Aと対称な点Cの座標は $\boxed{キ}$ で，2点B，Cを通る直線と x 軸との交点の座標は $\boxed{ク}$ である。

(5) $a>0$ のとき，放物線 $y=-ax^2+4ax-3a+3$ の $1 \leqq x \leqq 4$ における最大値は $\boxed{ケ}$ である。このとき，最小値が -3 であるならば $a=\boxed{コ}$ である。

[2] (1) x^2-y^2+6y-9 を因数分解すると $(\boxed{サ})\times(\boxed{シ})$ となる。

(2) $\triangle$ABC において，$\angle\mathrm{B}=45^\circ$，$\angle\mathrm{C}=60^\circ$，$\mathrm{AB}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ であるならば，$\mathrm{CA}=\boxed{ス}$，$\mathrm{BC}=\boxed{セ}$ である.

(3) 曲線 $C_1 : y=2x^2-3x-2$ を x 軸方向に a だけ平行移動した曲線を C_2 とする。C_1 と x 軸との交点を左から P，Q とし，C_2 と x 軸との交点を左から R，S とすると，S の x 座標は $\boxed{ソ}$ であるから，$\mathrm{PS}=5$ となる正数 a の値は $\boxed{タ}$ である。

(4) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$y=-\sin^2\theta+2\cos\theta-1$ の最大値は $\boxed{チ}$，最小値は $\boxed{ツ}$ である。

(5) 川幅が $100\sqrt{3}$ m で両岸が平行な川の両岸にそれぞれ点P，Qを，線分PQが岸に直交するようにとる。点Qのある岸のQの下流に $\angle\mathrm{QPR}=60^\circ$ である目印の点Rをとると $\mathrm{QR}=\boxed{テ}$ m である。流れが岸に平行であるとするとき，川の中央における流速を調べるためPQの中央Aから流した物体がPRの中点Bを通るまでに要した時間が25分であった。このとき流速は分速 $\boxed{ト}$ m である。

[3] A，B，Cの玉1個の重さは，それぞれ1g，5g，10gである。これらの玉を取り混ぜ，合計100個，重さの合計が730gにしたい，ただし選ばない種類の玉があってもよいとする。A玉を x 個，B玉を y 個，C玉を z 個選んだとき，与えられた条件を式で表すと $\boxed{ナ}=100$，$\boxed{ニ}=730$ である。C玉の個数 z の最大値は $\boxed{ヌ}$ であり，そのとき $x=\boxed{ネ}$，$y=\boxed{ノ}$ である。

[4] $\angle C = 90^\circ$ である直角三角形 ABC において，$AB = 8$，$AC = a$ とすると $BC = \boxed{\text{ハ}}$ である。辺 BC 上の中点 M より辺 AB に下ろした垂線の足を N とすると $BN = \boxed{\text{ヒ}}$ である。特に $AN : BN = 3 : 1$ であるならば $a = \boxed{\text{フ}}$ で，$\cos A = \boxed{\text{ヘ}}$ である。

解答例

[1] (1) $x^2+2x=t$ とおくと

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (t-1)(t+2)\\ &= t^2+t-2\\ &= (x^2+2x)^2+(x^2+2x)-2\\ &= (x^4+4x^3+4x^2)+x^2+2x-2\\ &= x^4+4x^3+5x^2+2x-2\end{aligned}$$

(答) ア. 4　イ. 5

(2) 与式の両辺を $1+\sqrt{3}$ で割ると

$$\begin{aligned}n+m\sqrt{3} &= \frac{3-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}\\ &= \frac{-6+4\sqrt{3}}{3-1} = -3+2\sqrt{3}\end{aligned}$$

m，n は有理数であるから　$\boldsymbol{m=2,\ n=-3}$

(答) ウ. 2　エ. -3

(3) $5x+3 \leqq 2x+4$ を解いて　$x \leqq \dfrac{1}{3}$　$\cdots$①

$2x-3 \leqq 4x+5$ を解いて　$x \geqq -4$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-4 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}}$

(答) オ. -4　カ. $\dfrac{1}{3}$

(4) x 軸に関して点 A$(-1,\ 2)$ と対称な点 C の座標は　$\boldsymbol{(-1, -2)}$

2 点 B$(3,\ 4)$，C$(-1, -2)$ を通る直線の方程式は　$y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{2}$

この直線の x 軸との交点の x 座標は

$$\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=\frac{1}{3}$$

よって，2 点 B，C を通る直線の x 軸との交点の座標は　$\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)}$

(答) キ. $(-1, -2)$　ク. $\left(\dfrac{1}{3},\ 0\right)$

(5) $y=-ax^2+4ax-3a+3$ の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} y &= -a(x^2-4x)-3a+3 \\ &= -a\{(x-2)^2-2^2\}-3a+3 \\ &= -a(x-2)^2+a+3 \end{aligned}$$

x^2 の係数について $-a<0$ であるから，$1 \leqq x \leqq 4$ において，
y は $x=2$ で最大値 $\boldsymbol{a+3}$ をとり，$x=4$ で最小値 $-3a+3$ をとる．
最小値が -3 であるとき

$$-3a+3=-3 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=2}$$

(答) ケ．$a+3$　コ．2

[2] (1) $$\begin{aligned} x^2-y^2+6y-9 &= x^2-(y-3)^2 \\ &= \{x+(y-3)\}\{x-(y-3)\} \\ &= \boldsymbol{(x+y-3)(x-y+3)} \end{aligned}$$

(答) サ．シ．$x+y-3,\ x-y+3$

(2) $c=\frac{3}{2}\sqrt{2}$，$B=45^\circ$，$C=60^\circ$．正弦定理により $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$
$b\sin C=c\sin B$ であるから

$$b\sin 60^\circ=\frac{3}{2}\sqrt{2}\sin 45^\circ \quad \text{ゆえに} \quad b\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを解いて　　$b=\boldsymbol{\sqrt{3}}$
第 1 余弦定理により

$$\begin{aligned} a &= b\cos C+c\cos B=\sqrt{3}\cos 60^\circ+\frac{3}{2}\sqrt{2}\cos 45^\circ \\ &= \sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}=\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}}{2}} \end{aligned}$$

(答) ス．$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　セ．$\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

第 1 余弦定理

$a=b\cos C+c\cos B$，$b=c\cos A+a\cos C$，$c=a\cos B+b\cos A$
なお，余弦定理とは，第 2 余弦定理のことである．

(3) $y = 2x^2 - 3x - 2$ より　$y = (x-2)(2x+1)$

したがって　　$\mathrm{P}(-\frac{1}{2},\ 0)$，$\mathrm{Q}(2,\ 0)$

Q を x 軸方向に a だけ平行移動した点が S であるから　$\mathrm{S}(\boldsymbol{2+a},\ 0)$

$a > 0$ に注意して　$\mathrm{PS} = (2+\mathrm{a}) - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \mathrm{a} + \dfrac{5}{2}$

$\mathrm{PS} = 5$ のとき　$a + \dfrac{5}{2} = 5$　ゆえに　$\boldsymbol{a = \dfrac{5}{2}}$

(答) ソ．$2+a$　タ．$\dfrac{5}{2}$

(4) $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ より，$\cos\theta = x$ とすると　$-1 \leqq x \leqq 1$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - x^2$ であるから，関数は

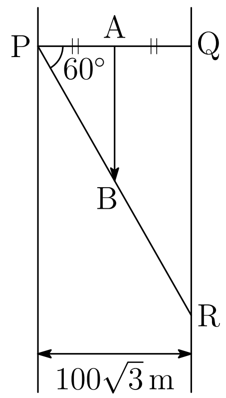
$$\begin{aligned} y &= -(1-x^2) + 2x - 1 \\ &= x^2 + 2x - 2 \\ &= (x+1)^2 - 3 \end{aligned}$$

したがって　$x = 1$　　すなわち　$\theta = 0^\circ$ のとき　　最大値 **1**

$x = -1$　すなわち　$\theta = 180^\circ$ のとき　最小値 **−3**

(答) チ．1　ツ．-3

(5) 右の図より



$$\begin{aligned} \mathrm{QR} &= \mathrm{PQ}\tan 60^\circ \\ &= 100\sqrt{3} \times \sqrt{3} \\ &= \mathbf{300}\ [\mathrm{m}] \end{aligned}$$

$\mathrm{AB} = \dfrac{1}{2}\mathrm{QR}$ であるから

$$\mathrm{AB} = \frac{1}{2} \times 300 = 150\ [\mathrm{m}]$$

よって，求める流速は　$\dfrac{150}{25} = \mathbf{6}$ [m/分]

(答) テ．300　ト．6

[3] 題意より　$\boldsymbol{x+y+z}=100$，$\boldsymbol{x+5y+10z}=730$

上の 2 式より　$\begin{cases} x+y=100-z & \cdots ① \\ x+5y=730-10z & \cdots ② \end{cases}$

② − ① より

$$4y=630-9z \quad \text{ゆえに} \quad y=\frac{9(70-z)}{4} \quad \cdots ③$$

① × 5 − ② より

$$4x=5z-230 \quad \text{ゆえに} \quad x=\frac{5(z-46)}{4} \quad \cdots ④$$

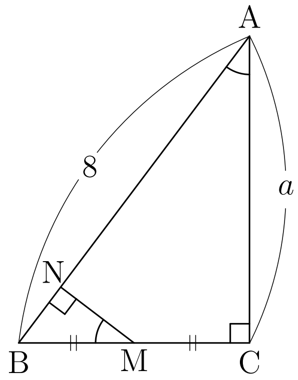
$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ であるから，③，④ より

$$70-z \geqq 0 \quad \text{かつ} \quad z-46 \geqq 0 \quad \text{ゆえに} \quad 46 \leqq z \leqq 70$$

よって，z の最大値は，③，④ に注意して **70**，このとき　$\boldsymbol{x=30}$，$\boldsymbol{y=0}$

(答) ナ．$x+y+z$　ニ．$x+5y+10z$　ヌ．70　ネ．30　ノ．0

[4] 三平方の定理を △ABC に適用すると



$$\mathrm{BC} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{AC}^2}$$
$$= \boldsymbol{\sqrt{64 - a^2}}$$

したがって　$\mathrm{BM} = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC} = \dfrac{1}{2}\sqrt{64 - a^2}$

$$\sin A = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{\sqrt{64 - a^2}}{8}$$

$\angle\mathrm{BMN} = A$ であるから

$$\mathrm{BN} = \mathrm{BM}\sin\angle\mathrm{BMC} = \frac{1}{2}\sqrt{64 - a^2} \times \frac{\sqrt{64 - a^2}}{8} = \boldsymbol{\frac{64 - a^2}{16}}$$

$\mathrm{AN} : \mathrm{BN} = 3 : 1$ であるから，$\mathrm{AB} = 8$ より　$\mathrm{BN} = 2$

したがって　$\dfrac{64 - a^2}{16} = 2$　$a > 0$ であるから　$\boldsymbol{a = 4\sqrt{2}}$

$$\cos A = \frac{4\sqrt{2}}{8} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(答) ハ. $\sqrt{64 - a^2}$　ヒ. $\dfrac{64 - a^2}{16}$　フ. $4\sqrt{2}$　ヘ. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$