熊本県立技術短期大学校

推薦入学(前期)試験問題

数学I(90分)

平成21年9月27日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙及び答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

平成 22 年度　熊本県立技術短期大学校推薦 (前期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) $(2x-3y+3)(2x+3y-3)$ を展開すると $4x^2-\boxed{\text{ア}}y^2+\boxed{\text{イ}}y-9$ となる。

(2) a が 2 と異なる正の整数のとき $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}$ を有理数に直すと $\boxed{\text{ウ}}$ である。特にその有理数が 4 となるのは $a=\boxed{\text{エ}}$ のときである。

(3) 不等式 $3|\,x-2\,|<2x+1$ をみたす x の範囲は $\boxed{\text{オ}}<x<\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 2 次不等式 $ax^2+bx+3>0$ の解が $-1<x<3$ であるとき，$a=\boxed{\text{キ}}$，$b=\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $y=3x^2-6x+5$ のグラフの頂点は $\boxed{\text{ケ}}$ で，軸は直線 $x=\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) $y=-2x^2+12x-14$ の $2\leqq x\leqq 5$ における最大値は $\boxed{\text{サ}}$，最小値は $\boxed{\text{シ}}$ である。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ において $\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=\sqrt{6}$，$\angle\mathrm{C}=45^\circ$ とする。このとき $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の半径は $\boxed{\text{ス}}$ である。また，$0<\angle\mathrm{A}<90^\circ$ ならば，$\angle\mathrm{A}=\boxed{\text{セ}}^\circ$ である。

(3) $\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ $(90^\circ<\theta<180^\circ)$ のとき，$\cos\theta=\boxed{\text{ソ}}$，$\tan\theta=\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) 四角形 ABCD において $\mathrm{BC}=4$，$\mathrm{CD}=2$，$\mathrm{AD}=\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ABD}=30^\circ$，$\angle\mathrm{C}=60^\circ$ ならば $\mathrm{BD}=\boxed{\text{チ}}$，$\mathrm{AB}=\boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) 四面体 P と四面体 Q は相似で，相似比は $2:1$ である。P の体積が $20\mathrm{cm}^3$，表面積が $8\mathrm{cm}^2$ のとき，Q の体積は $\boxed{\text{テ}}\,\mathrm{cm}^3$，表面積は $\boxed{\text{ト}}\,\mathrm{cm}^2$ である。

[3] 2 次関数 $y=-2x^2+12x$ のグラフ C_1 と x 軸との交点は $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と $\mathrm{A}(\boxed{\text{ナ}},\ 0)$ である。C_1 を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動したグラフを C_2 とする。C_2 も O を通るなら，a と b は関係式 $b=\boxed{\text{ニ}}$ をみたす。このとき，C_2 と x 軸の O 以外の交点の座標は $\mathrm{B}(\boxed{\text{ヌ}},\ 0)$ であるから，$\mathrm{OA}:\mathrm{AB}=3:2$ となるのは $a=\boxed{\text{ネ}}$ のときである。ただし $a>0$ とする。

[4] $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=5$ とする。$\angle\mathrm{A}=\theta$ は $0^\circ<\theta<90^\circ$ であり，さらに等式 $2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0$ をみたすとする。このとき $\theta=\boxed{\text{ノ}}^\circ$ であり，$\mathrm{BC}=\boxed{\text{ハ}}$ である。また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\boxed{\text{ヒ}}$ となる。BC 上の点 D を $\triangle\mathrm{ABD}$ の面積が $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積の半分になるように定めるとき $\mathrm{AD}=\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) $(2x-3y+3)(2x+3y-3)=\{2x-(3y-3)\}\{2x+(3y-3)\}$

$$=(2x)^2-(3y-3)^2$$
$$=4x^2-(9y^2-18y+9)$$
$$=\boldsymbol{4x^2-9y^2+18y-9}$$

(答) ア. 9　イ. 18

(2) $$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{\sqrt{a}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{a}+\sqrt{2}}{\sqrt{a}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{a}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{2})(\sqrt{a}-\sqrt{2})}=\boldsymbol{\frac{2(a+2)}{a-2}}$$

特にこの値が 4 のとき

$$\frac{2(a+2)}{a-2}=4\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{a=6}$$

(答) ウ. $\dfrac{2(a+2)}{a-2}$　エ. 6

(3) $3|\,x-2\,|<2x+1$ から　$|3(x-2)|<2x+1$

したがって　$-(2x+1)<3(x-2)<2x+1$

ゆえに $$\begin{cases} -(2x+1)<3(x-2) \\ 3(x-2)<2x+1 \end{cases}$$

第 1 式から　$-2x-1<3x-6$

すなわち　$x>1$　$\cdots$①

第 2 式から　$3x-6<2x+1$

すなわち　$x<7$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1<x<7}$

(答) オ. 1　カ. 7

(4) $-1<x<3$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$$(x+1)(x-3)<0\quad \text{すなわち}\quad x^2-2x-3<0$$

求める 2 次不等式は，定数項に注意して　$-x^2+2x+3>0$

よって　$\boldsymbol{a=-1,\ b=2}$

(答) キ. -1　ク. 2

(5) $y = 3x^2 - 6x + 5$ の右辺を変形すると

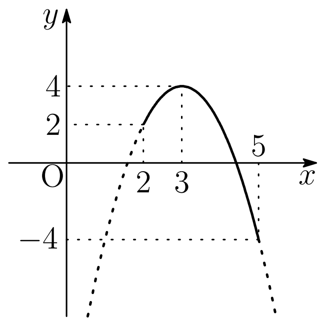
$$\begin{aligned} 3x^2 - 6x + 5 &= 3(x^2 - 2x) + 5 \\ &= 3\{(x-1)^2 - 1^2\} + 5 \\ &= 3(x-1)^2 + 2 \end{aligned}$$

よって，グラフの頂点は **(1，2)**，軸は $\boldsymbol{x = 1}$

(答) ケ．(1，2)　コ．1

[2] (1) $y = -2x^2 + 12x - 14$ を変形すると

$$y = -2(x-3)^2 + 4$$



$2 \leqq x \leqq 5$ でのグラフは，右の図の実線部分である．よって，y は

$x = 3$ で**最大値 4** をとり，

$x = 5$ で**最小値 −4** をとる．

(答) サ．4　シ．−4

(2) 外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\frac{\sqrt{6}}{\sin A} = \frac{2}{\sin 45^\circ} = 2R$$

ゆえに　$R = \dfrac{1}{\sin 45^\circ} = \boldsymbol{\sqrt{2}}$

また　　$\sin A = \dfrac{\sqrt{6}\sin 45^\circ}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ < \angle\mathrm{A} < 90^\circ$ であるから　$\boldsymbol{\angle\mathrm{A} = 60^\circ}$

(答) ス．$\sqrt{2}$　セ．60

(3) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$$

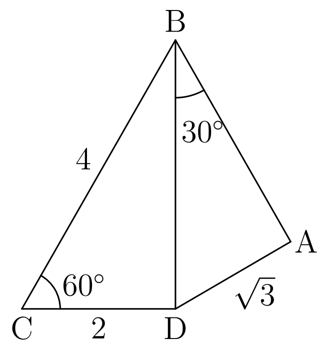
$90^\circ<\theta<180^\circ$ より，$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{8}{9}}=\boldsymbol{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$$

また　　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}\div\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=\boldsymbol{-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}}$

(答) ソ. $-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　タ. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

(4) $\triangle$BCD において



$$\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BC}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad \cos C=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

であるから，$\angle\mathrm{BDC}=90^\circ$．よって

$$\mathrm{BD}=\mathrm{BC}\sin 60^\circ=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$$

また，$\triangle$ABD において

$$\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{BD}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2},\quad \sin B=\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

であるから，$\angle\mathrm{DAB}=90^\circ$．よって

$$\mathrm{AB}=\mathrm{BD}\cos 30^\circ=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{3}$$

(答) チ. $2\sqrt{3}$　ツ. 3

(5) P と Q の相似比より，体積比は $2^3:1$，表面積の比は $2^2:1$ であるから

P の体積が $20\mathrm{cm}^3$ であるから，Q の体積は　　$20\times\dfrac{1}{2^3}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}\ \mathrm{cm}^3$

P の表面積が $8\mathrm{cm}^2$ であるから，Q の表面積は　　$8\times\dfrac{1}{2^2}=\boldsymbol{2}\ \mathrm{cm}^2$

(答) テ. $\dfrac{5}{2}$　ト. 2

[3] 放物線 $C_1 : y = -2x^2 + 12x$ の x 軸との共有点の x 座標は

$$-2x^2 + 12x = 0 \quad \text{これを解いて} \quad x = 0,\ 6$$

求める共有点の座標は　O(0, 0)，A(**6**, 0)

C_1 を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動した放物線 C_2 の方程式は

$$y - b = -2(x-a)^2 + 12(x-a) \quad \cdots ①$$

これが，原点 O を通るので

$$0 - b = -2(0-a)^2 + 12(0-a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{b = 2a^2 + 12a} \quad \cdots ②$$

② を ① に代入して整理すると　$y = -2x(x - 2a - 6)$

これから，C_2 と x 軸の O 以外の共有点の座標は　B($\boldsymbol{2a+6}$, 0)

OA，AB は，$a > 0$ であるから

$$\mathrm{OA} = 6 - 0 = 6, \quad \mathrm{AB} = (2a+6) - 6 = 2a$$

OA : AB = 3 : 2 より

$$6 : 2a = 3 : 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a = 2}$$

(答) ナ. 6　ニ. $2a^2 + 12a$　ヌ. $2a + 6$　ネ. 2

[4] $2\sin^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$ を変形すると

$$2(1-\cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$$

整理して　$2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

ゆえに　$(\cos\theta - 1)(2\cos\theta - 1) = 0$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より $0 < \cos\theta < 1$ であることに注意して

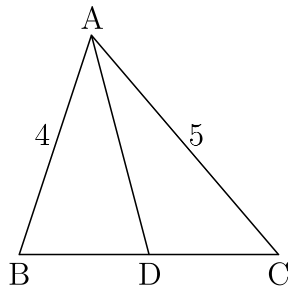
$$\cos\theta = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\theta = 60^\circ}$$

余弦定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\theta \\ &= 4^2 + 5^2 - 2\cdot4\cdot5 \times \frac{1}{2} \\ &= 21 \end{aligned}$$

$\mathrm{BC} > 0$ より　$\mathbf{BC} = \boldsymbol{\sqrt{21}}$

また　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\cdot4\cdot5 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{5\sqrt{3}}$



$\triangle$ABD の面積は，$\triangle$ABC の面積の半分であるから，D は BC の中点である．

ゆえに　$\mathrm{BD} = \dfrac{\sqrt{21}}{2}$

$\mathrm{AD} = x$ とおき，これらを中線定理

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2(\mathrm{AD}^2 + \mathrm{BD}^2)$$

に代入すると

$$4^2 + 5^2 = 2\left(x^2 + \frac{21}{4}\right) \quad \text{すなわち} \quad x^2 = \frac{61}{4}$$

$\mathrm{AD} > 0$ であるから　$\mathbf{AD} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{61}}{2}}$

(答) ノ. 60　ハ. $\sqrt{21}$　ヒ. $5\sqrt{3}$　フ. $\dfrac{\sqrt{61}}{2}$