熊本県立技術短期大学校

推薦入学(前期)試験問題

数学I(90分)

平成20年9月21日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙及び答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

平成 21 年度　熊本県立技術短期大学校推薦 (前期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) $(ax+b)^3$ を展開したときの x^2 の係数が 12，x の係数が 6 ならば，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$，$b=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $x=\dfrac{4}{5-\sqrt{3}}$ の分母を有理化すると，$x=$ $\boxed{\text{ウ}}$ で x の整数部分は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) 2 次不等式 $2x^2+x-6<0$ を満たす x の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ $<x<$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) $2|x+1|-|x-2|=2$ を満たす x の値は $x=$ $\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $90^\circ<\theta<180^\circ$ とする。$\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$ のとき，$\cos\theta=$ $\boxed{\text{ケ}}$，$\sin\theta=$ $\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) 頂点が $(-2,\ 3)$ で x 軸との共有点の 1 つが $(-3,\ 0)$ である放物線 C をグラフとする 2 次関数は $y=$ $\boxed{\text{サ}}$ で，C と x 軸とのもう 1 つの共有点は ($\boxed{\text{シ}}$, 0) である。

(2) 2 次関数 $y=-2x^2+6x-\dfrac{7}{2}$ の定義域が $1\leqq x\leqq 3$ ならば，値域は $\boxed{\text{ス}}$ $\leqq y\leqq$ $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) $y=2x^2-8x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最大値が 12 であるならば，$c=$ $\boxed{\text{ソ}}$ で最小値は $\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) $y=x^2+ax+b$ のグラフが点 $(3,\ 6)$ を通り，その頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるならば，$a=$ $\boxed{\text{チ}}$，$b=$ $\boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) $\triangle$ABC において AB $=15$，BC $=18$，AC $=12$ とする。線分 BC 上の点 D を BD : DC $=$ AB : AC となるように定める。このとき DC $=$ $\boxed{\text{テ}}$，AD $=$ $\boxed{\text{ト}}$ である。

[3] 放物線 $C: y=-ax^2+a$ $(a>1)$ と x 軸との交点を M，N とする。x 軸上の 2 点 P$(-b,\ 0)$，Q$(b,\ 0)$ $(0<b<1)$ と放物線 C 上の 2 点 R，S を，四辺形 PQRS が長方形となるようにとり，その長方形の 4 辺の長さの和を ℓ とすると，ℓ は a，b を用いて $\boxed{\text{ナ}}$ と書ける。従って，ℓ は $b=$ $\boxed{\text{ニ}}$ のとき最大となり，その最大値を m とすると，$m=$ $\boxed{\text{ヌ}}$ である。特に $m=4$MN となるのは $a=$ $\boxed{\text{ネ}}$ のときである。

[4] $\triangle$ABC において AB : AC : BC $=4:5:6$ であるとき，$\cos A=$ $\boxed{\text{ノ}}$，$\sin A=$ $\boxed{\text{ハ}}$ である。更に，$\triangle$ABC の外接円の半径が $\dfrac{16}{7}$ であるとき，BC $=$ $\boxed{\text{ヒ}}$，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) $(ax+b)^3 = a^3x^3 + 3a^2bx^2 + 3ab^2x + b^3$ より，x^2 と x の係数について

$$3a^2b = 12,\ 3ab^2 = 6$$

であるから

$$a^2b = 4,\ ab^2 = 2$$

を得る．上の 2 式から

$$\frac{(a^2b)^2}{ab^2} = \frac{4^2}{2}$$

ゆえに　$a^3 = 8$

よって　$\boldsymbol{a = 2}$

これを第 1 式に代入して　$2^2b = 4$　よって　$\boldsymbol{b = 1}$

(答) ア．2　イ．1

(2) $x = \dfrac{4}{5-\sqrt{3}} = \dfrac{4(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})} = \boldsymbol{\dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}}$

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}$，$3 < \sqrt{12} < 4$ であるから

$$\frac{10+3}{11} < x < \frac{10+4}{11}$$

ゆえに，x の整数部分は　**1**

(答) ウ．$\dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}$　エ．1

(3) $2x^2 + x - 6 < 0$

ゆえに　$(x+2)(2x-3) < 0$

よって　$\boldsymbol{-2 < x < \dfrac{3}{2}}$

(答) オ．-2　カ．$\dfrac{3}{2}$

(4) [1] $x<-1$ のとき　$|x+1|=-x-1$，$|x-2|=-x+2$ であるから
方程式は　$2(-x-1)-(-x+2)=2$
これを解くと　$x=-6$
これは，$x<-1$ を満たすから，解である．
[2] $-1\leqq x<2$ のとき　$|x+1|=x+1$，$|x-2|=-x+2$ であるから
方程式は　$2(x+1)-(-x+2)=2$
これを解くと　$x=\dfrac{2}{3}$
これは，$-1\leqq x<2$ を満たすから，解である．
[3] $2\leqq x$ のとき　$|x+1|=x+1$，$|x-2|=x-2$ であるから
方程式は　$2(x+1)-(x-2)=2$
これを解くと　$x=-2$
これは，$2\leqq x$ に反するから，解ではない．

以上から，方程式の解は　$\boldsymbol{x=-6,\ \dfrac{2}{3}}$

(答) キ．ク．$-6,\ \dfrac{2}{3}$

(5) $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{16}{25}$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ より　$\cos\theta<0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{16}{25}}=\boldsymbol{-\frac{4}{5}}$$

また　$\sin\theta=\tan\theta\times\cos\theta=-\dfrac{3}{4}\times\left(-\dfrac{4}{5}\right)=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}}$

(答) ケ．$-\dfrac{4}{5}$　コ．$\dfrac{3}{5}$

[2] (1) 頂点が点 $(-2,\ 3)$ であるから，この 2 次関数は

$$y = a(x+2)^2 + 3$$

の形に表される．グラフが点 $(-3,\ 0)$ を通るから

$$0 = a(-3+2)^2 + 3$$
$$a = -3$$

よって　　$\boldsymbol{y = -3(x+2)^2 + 3}$

x 軸との共有点の x 座標は，$y=0$ を代入して

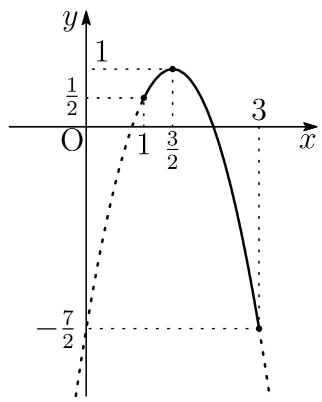
$0 = -3(x+2)^2 + 3$　これを解いて　$x = -3, -1$

よって，x 軸とのもう 1 つの共有点は　$\boldsymbol{(-1,\ 0)}$

(答) サ．$-3(x+2)^2+3$　シ．-1

(2) $y = -2x^2 + 6x - \dfrac{7}{2}$ を変形すると

$$y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 1$$



$1 \leqq x \leqq 3$ でのグラフは，右の図の実線部分である．
よって，値域は

$$\boldsymbol{-\frac{7}{2} \leqq y \leqq 1}$$

(答) ス．$-\dfrac{7}{2}$　セ．1

(3) $y = 2x^2 - 8x + c$ を変形すると　$y = 2(x-2)^2 + c - 8$
放物線は下に凸であり，定義域 $1 \leqq x \leqq 4$ の中央 $\dfrac{5}{2}$ は，放物線の軸 $x=2$ より右側にあるから，この関数は $x=4$(定義域の右端) で最大値 12 をとる．
ゆえに　$2{\cdot}4^2 - 8{\cdot}4 + c = 12$　これを解いて　$\boldsymbol{c = 12}$
このとき，$y = 2(x-2)^2 + 4$ となるから，$x=2$ で最小値 **4** をとる．

(答) ソ．12　タ．4

(4) $y = x^2 + ax + b$ のグラフが点 $(3,\ 6)$ を通るから

$$6 = 3^2 + a \cdot 3 + b$$

ゆえに　$b = -3a - 3$　$\cdots$ ①

式を変形すると　$y = \left(x + \dfrac{a}{2}\right)^2 + b - \dfrac{a^2}{4}$

放物線の頂点 $\left(-\dfrac{a}{2},\ b - \dfrac{a^2}{4}\right)$ が直線 $y = 2x + 1$ 上にあるから

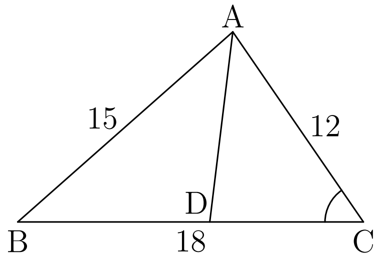
$$b - \frac{a^2}{4} = 2 \times \left(-\frac{a}{2}\right) + 1$$

ゆえに　$b = \dfrac{a^2}{4} - a + 1$　$\cdots$ ②

①, ② を解いて　$\boldsymbol{a = -4,\ b = 9}$

(答) チ. -4　ツ. 9

(5) $\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC} = 15 : 12 = 5 : 4$ より



$$\begin{aligned}\mathrm{DC} &= \mathrm{BC} \times \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{BD} + \mathrm{DC}} \\ &= 18 \times \frac{4}{5+4} = \mathbf{8}\end{aligned}$$

$\triangle$ABC に余弦定理を適用して

$$\cos C = \frac{\mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 - \mathrm{AB}^2}{2\mathrm{BC} \cdot \mathrm{CA}} = \frac{18^2 + 12^2 - 15^2}{2 \cdot 18 \cdot 12} = \frac{9}{16}$$

これらの結果を $\triangle$ADC に適用して

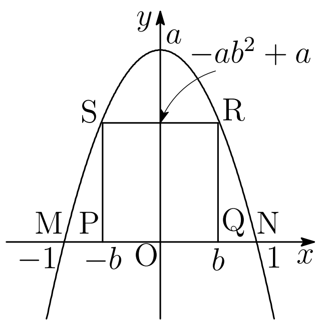
$$\begin{aligned}\mathrm{AD}^2 &= \mathrm{DC}^2 + \mathrm{CA}^2 - 2\mathrm{DC} \cdot \mathrm{CA} \cos C \\ &= 8^2 + 12^2 - 2 \cdot 8 \cdot 12 \times \frac{9}{16} \\ &= 100\end{aligned}$$

$\mathrm{AD} > 0$ であるから　$\mathbf{AD = 10}$

(答) テ. 8　ト. 10

[3]

$$\begin{aligned}\ell &= 2(\mathrm{PQ}+\mathrm{QR})\\ &= 2\{2b+(-ab^2+a)\}\\ &= \boldsymbol{-2ab^2+4b+2a}\end{aligned}$$



上式から

$$\begin{aligned}\ell &= -2a\left(b^2-\frac{2}{a}b\right)+2a\\ &= -2a\left\{\left(b-\frac{1}{a}\right)^2-\left(\frac{1}{a}\right)^2\right\}+2a\\ &= -2a\left(b-\frac{1}{a}\right)^2+\frac{2}{a}+2a\end{aligned}$$

$a>1$ より $0<\dfrac{1}{a}<1$ であるから

ℓ は，$\boldsymbol{b=\dfrac{1}{a}}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{m=\dfrac{2}{a}+2a}$

$m=4\mathrm{MN}$ となるのは，$y=-a(x+1)(x-1)$ より，$\mathrm{MN}=2$ であるから

$$\frac{2}{a}+2a=4\cdot 2 \quad \text{すなわち} \quad a^2-4a+1=0$$

$a>1$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{a=2+\sqrt{3}}$

(答) ナ．$-2ab^2+4b+2a$　ニ．$\dfrac{1}{a}$　ヌ．$\dfrac{2}{a}+2a$　ネ．$2+\sqrt{3}$

[4] AB : AC : BC $= 4 : 5 : 6$ であるから，実数 k を用いて

$$\mathrm{AB} = 4k,\ \mathrm{AC} = 5k,\ \mathrm{BC} = 6k \quad \cdots ①$$

とおくことができる．これを余弦定理に適用すると

$$\cos A = \frac{(5k)^2 + (4k)^2 - (6k)^2}{2{\cdot}5k{\cdot}4k} = \boldsymbol{\frac{1}{8}}$$

さらに　$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}}{8}}$

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A} = 2R$

ゆえに

$$\begin{aligned}\mathrm{BC} &= 2R\sin A \\ &= 2 \times \frac{16}{7} \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \boldsymbol{\frac{12\sqrt{7}}{7}}\end{aligned}$$

これを ① に代入して　$k = \dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

ゆえに　$\mathrm{AB} = \dfrac{8\sqrt{7}}{7}$，$\mathrm{AC} = \dfrac{10\sqrt{7}}{7}$

よって

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{1}{2}\mathrm{AB}{\cdot}\mathrm{BC}\sin A \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{7}}{7} \times \frac{10\sqrt{7}}{7} \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \boldsymbol{\frac{15\sqrt{7}}{7}}\end{aligned}$$

(答) ノ. $\dfrac{1}{8}$　ハ. $\dfrac{3\sqrt{7}}{8}$　ヒ. $\dfrac{12\sqrt{7}}{7}$　フ. $\dfrac{15\sqrt{7}}{7}$