熊本県立技術短期大学校

推薦入学(前期)試験問題

数学I(90分)

平成19年9月23日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題冊子および答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

平成 20 年度　熊本県立技術短期大学校推薦 (前期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) $(2x+1)(3x^2+4x+2)$ を展開したときの x^2 の係数は $\boxed{\text{ア}}$, x の係数は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $3x^2+7x-6$ を因数分解すると $(\boxed{\text{ウ}}) \times (\boxed{\text{エ}})$ となる。

(3) $y=2x^2-4x+5$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動させると $y=2x^2-8x+13$ となった。このとき, $p=\boxed{\text{オ}}$, $q=\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 2 次不等式 $x^2+ax+b \leqq 0$ の解が $2 \leqq x \leqq 4$ であるとき, $a=\boxed{\text{キ}}$, $b=\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $\tan\theta = 2$ $(0^\circ < \theta < 90^\circ)$ ならば, $\cos\theta=\boxed{\text{ケ}}$, $\sin\theta=\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) $x-3+2|x-2|<0$ となる x の範囲は $\boxed{\text{サ}} < x < \boxed{\text{シ}}$ である。

(2) 2 次関数のグラフが 3 点 $(1,\ 0)$, $(3,\ 0)$, $(0,\ 6)$ を通るとき，その 2 次関数は $y=\boxed{\text{ス}}$ であり，そのグラフの頂点は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) 2 次関数 $y=-3x^2+12x-4$ の定義域が $1 \leqq x \leqq 4$ であるとき，最大値は $\boxed{\text{ソ}}$, 最小値は $\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) 両岸が平行な川がある。現在いる点 O と対岸の点 P を結ぶ直線が川と直角であるとする。点 O を通り川に平行な直線上の $\angle\mathrm{PQO}=60^\circ$ となる点 Q は, $\mathrm{OQ}=60\sqrt{3}\mathrm{m}$ の点であった。このとき, $\mathrm{OP}=\boxed{\text{チ}}\mathrm{m}$ である。線分 OQ の延長線上にあり $\angle\mathrm{PRO}=30^\circ$ となる点 R は $\mathrm{OR}=\boxed{\text{ツ}}\mathrm{m}$ の点である。

(5) $\triangle\mathrm{ABC}$ において, $\angle\mathrm{A}=45^\circ$, $\angle\mathrm{B}=15^\circ$, $\mathrm{BC}=3\sqrt{2}$ ならば, $\angle\mathrm{C}=\boxed{\text{テ}}^\circ$ で, $\mathrm{AB}=\boxed{\text{ト}}$ である。

[3] 2 次関数 $y=x^2-3x+4$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最大値を b とする。b を a で表すと $a \leqq \boxed{\text{ナ}}$ のときは $b=\boxed{\text{ニ}}$, a がそれ以外の範囲にあるときは $b=\boxed{\text{ヌ}}$ である。また, b は, $a=\boxed{\text{ネ}}$ のとき最小値 $\boxed{\text{ノ}}$ をとる。

[4] 四角形 ABCD において, $\mathrm{AB}=20$, $\mathrm{BC}=25$, $\mathrm{CD}=30$, $\mathrm{DA}=15$ で $\angle\mathrm{ABC}=120^\circ$ ならば, $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\boxed{\text{ハ}}$ で $\mathrm{AC}=\boxed{\text{ヒ}}$ となる。$\angle\mathrm{CDA}=\theta$ とおくと $\cos\theta=\boxed{\text{フ}}$ であるから, $\sin\theta=\boxed{\text{ヘ}}$ となり, $\triangle\mathrm{ACD}$ の面積は $\boxed{\text{ホ}}$ となる。

解答例

[1] (1) $(2x+1)(3x^2+4x+2)$ を展開したとき

x^2 の項は　$2x \times 4x + 1 \times 3x^2 = 11x^2$

x の項は　$2x \times 2 + 1 \times 4x = 8x$

したがって，x^2 の係数は $\mathbf{11}$，x の係数は $\mathbf{8}$ である。

(答) ア．11　イ．8

(2) $3x^2+7x-6$ を因数分解すると

$$\boldsymbol{(x+3)(3x-2)}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 \longrightarrow & 9 \\ 3 & -2 \longrightarrow & -2 \\ \hline 3 & -6 & 7 \end{array}$$

(答) ウ．エ．$x+3$，$3x-2$

(3) $y=2x^2-4x+5$ を変形すると　$y=2(x-1)^2+3$

$y=2x^2-8x+13$ を変形すると　$y=2(x-2)^2+5$

よって，頂点は $(1,\ 3)$ から $(2,\ 5)$ に移動する．

したがって，第 2 式は，第 1 式を

x 軸方向に　$p=2-1=\mathbf{1}$，　y 軸方向に　$q=5-3=\mathbf{2}$

だけ平行移動したものである．

(答) オ．1　カ．2

(4) $2 \leqq x \leqq 4$ を解とする 2 次不等式の 1 つは

$(x-2)(x-4) \leqq 0$　すなわち　$x^2-6x+8 \leqq 0$

したがって，$x^2+ax+b \leqq 0$ の係数と比較して　$a=\mathbf{-6}$，$b=\mathbf{8}$

(答) キ．-6　ク．8

(5) $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$$

$0^\circ < \theta < 90^\circ$ より　$\cos\theta > 0$ であるから

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

また　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(答) ケ．$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　コ．$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

[2] (1)　[1] $x \geqq 2$ のとき　$|x-2| = x-2$ であるから

不等式は　$x-3+2(x-2)<0$

これを解いて　$x < \dfrac{7}{3}$

$x \geqq 2$ に注意して　$2 \leqq x < \dfrac{7}{3}$

[2] $x < 2$ のとき　$x-2 = -(x-2) = -x+2$ であるから

不等式は　$x-3+2(-x+2)<0$

これを解いて　$x>1$

$x<2$ に注意して　$1<x<2$

したがって，求める解は　$\boldsymbol{1 < x < \dfrac{7}{3}}$

【別解】 $x-3+2|x-2|<0$ から　$|x-2| < \dfrac{3-x}{2}$

したがって　$-\dfrac{3-x}{2} < x-2 < \dfrac{3-x}{2}$

$-\dfrac{3-x}{2} < x-2$　を解いて　$x>1$　$\cdots$①

$x-2 < \dfrac{3-x}{2}$　を解いて　$x < \dfrac{7}{3}$　$\cdots$②

①，② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{1 < x < \dfrac{7}{3}}$

(答) サ．1　シ．$\dfrac{7}{3}$

(2) x 軸と 2 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ で交わるから，求める 2 次関数は

$$y = a(x-1)(x-3)$$

の形で表される．このグラフが点 $(0,\ 6)$ を通るから

$$6 = a\cdot(-1)\cdot(-3)　ゆえに　a=2$$

よって　$y=2(x-1)(x-3)$　すなわち　$y = \boldsymbol{2x^2-8x+6}$

また，$2x^2-8x+6 = 2(x-2)^2-2$ であるから，頂点の座標は $\boldsymbol{(2, -2)}$

(答) ス．$2x^2-8x+6$　セ．$(2,-2)$

(3) $y=-3x^2+12x-4$ を変形すると

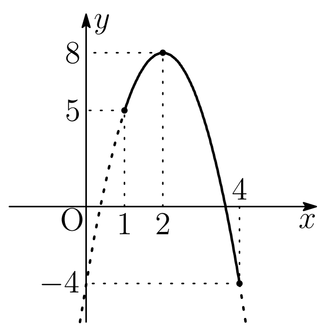
$$y=-3(x-2)^2+8$$

$1 \leqq x \leqq 4$ は，右の図の実線部分である．

よって，y は

$x=2$ で最大値 **8** をとり，

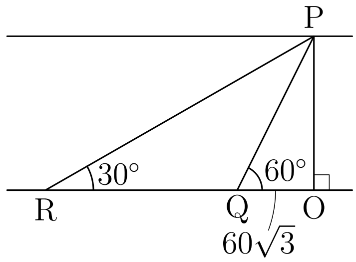
$x=4$ で最小値 $\boldsymbol{-4}$ をとる．



(答) ソ．8　タ．-4

(4) $\triangle$OPQ において

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ}\tan 60^\circ$$
$$= 60\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \mathbf{180}\ (\mathrm{m})$$



$\triangle$OPR において

$$\mathrm{OR} = \mathrm{OP}\tan\angle\mathrm{OPR}$$
$$= 180\tan 60^\circ = \mathbf{180\sqrt{3}}\ (\mathrm{m})$$

(答) チ. 180　ツ. $180\sqrt{3}$

(5) $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = \mathbf{120^\circ}$

正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}$

よって　$\mathrm{AB}\sin 45^\circ = 3\sqrt{2}\sin 120^\circ$

$$\mathrm{AB} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって　$\mathrm{AB} = \mathbf{3\sqrt{3}}$

(答) テ. 120　ト. $3\sqrt{3}$

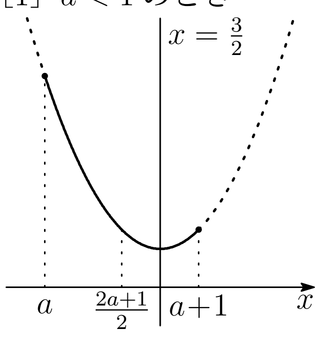
[3] $y = x^2 - 3x + 4 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4}$ であるから，与えられた関数のグラフは下に凸の放物線で，軸は $x = \dfrac{3}{2}$ である．$a \leqq x \leqq a + 1$ の中央は　$x = \dfrac{2a+1}{2}$

［1］$\dfrac{2a+1}{2} < \dfrac{3}{2}$　すなわち　$a < 1$ のとき
$x = a$ で最大値をとるから　$b = a^2 - 3a + 4$

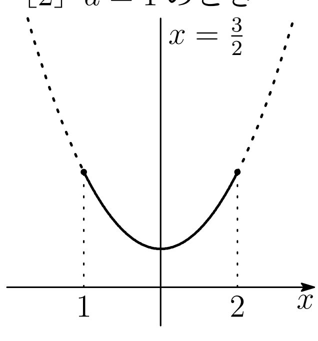
［2］$\dfrac{2a+1}{2} = \dfrac{3}{2}$　すなわち　$a = 1$ のとき
$x = 1,\ 2$ で最大値をとるから　$b = 2$

［3］$\dfrac{3}{2} < \dfrac{2a+1}{2}$　すなわち　$a > 1$ のとき
$x = a + 1$ で最大値をとるから　$b = (a+1)^2 - 3(a+1) + 4 = a^2 - a + 2$

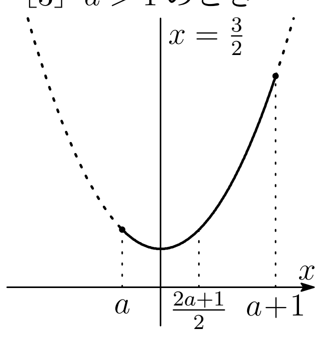
［1］$a < 1$ のとき

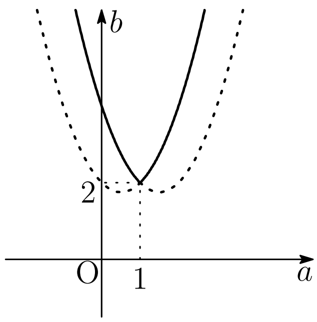


［2］$a = 1$ のとき



［3］$a > 1$ のとき





したがって，$a \leqq 1$ のとき

$$b = \boldsymbol{a^2 - 3a + 4}$$

a がそれ以外の範囲にあるとき

$$b = \boldsymbol{a^2 - a + 2}$$

である．

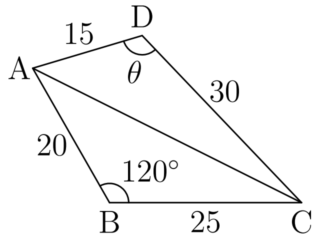
また，グラフは右の図の実線部分である．

よって，b は，$a = \mathbf{1}$ のとき最小値 $\mathbf{2}$ をとる．

[4] $\triangle$ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\sin B = \frac{1}{2}\cdot 20\cdot 25\sin 120^\circ = \mathbf{125\sqrt{3}}$$

$\triangle$ABC に余弦定理を適用して



$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos B \\ &= 20^2 + 25^2 - 2\cdot 20\cdot 25\cos 120^\circ \\ &= 1525\end{aligned}$$

$\mathrm{AC} > 0$ であるから　$\mathrm{AC} = \sqrt{1525} = \mathbf{5\sqrt{61}}$

$\triangle$ACD に余弦定理を適用して

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathrm{CD}^2 + \mathrm{DA}^2 - \mathrm{AC}^2}{2\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}} \\ &= \frac{30^2 + 15^2 - 1525}{2\cdot 30\cdot 15} = \boldsymbol{-\frac{4}{9}}\end{aligned}$$

$\sin\theta > 0$ であるから　$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{65}}{9}}$

したがって，$\triangle$ACD の面積は

$$\triangle\mathrm{ACD} = \frac{1}{2}\mathrm{CD}\cdot\mathrm{DA}\sin\theta = \frac{1}{2}\cdot 30\cdot 15\cdot\frac{\sqrt{65}}{9} = \mathbf{25\sqrt{65}}$$

(答) ハ．$125\sqrt{3}$　ヒ．$5\sqrt{61}$　フ．$-\frac{4}{9}$　ヘ．$\frac{\sqrt{65}}{9}$　ホ．$25\sqrt{65}$