熊本県立技術短期大学校

推薦入学(後期)試験問題

数学I(90分)

平成23年11月27日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙および解答用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

平成 24 年度　熊本県立技術短期大学校推薦 (後期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) $\dfrac{4}{5-\sqrt{3}}$ の分母を有理化すると $\boxed{\text{ア}}$ だから，その整数部分は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 2 次方程式 $x^2+(2a+1)x+a^2-1=0$ が実数解を持つとき，a の範囲は $a \geqq \boxed{\text{ウ}}$ である。とくに重解を持つならば，その解は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $2|x-2|<x+3$ が成り立つ x の範囲は $\boxed{\text{オ}} < x < \boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 2 次関数 $y=2x^2-3x+2$ のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，2 点 $(1,\ 6)$，$(3,\ 0)$ を通る。このとき，$p=\boxed{\text{キ}}$，$q=\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) 半径 $\sqrt{2}$ の円に内接する三角形 ABC において $\angle\mathrm{A}=135^\circ$ ならば $\mathrm{BC}=\boxed{\text{ケ}}$ である。さらに，$\angle\mathrm{B}=30^\circ$ ならば，$\mathrm{AB}=\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) $2(a+1)x^2+(2a^2-a+1)x-2a^2+3a-1$ を因数分解すると，$\boxed{\text{サ}} \times \boxed{\text{シ}}$ である。

(2) 2 つの 2 次関数 $y=x^2+ax+2a$，$y=x^2-ax+a^2-3$ のグラフと x 軸との共有点の個数は，それぞれ 2 個である。このとき a の範囲は $\boxed{\text{ス}} < x < \boxed{\text{セ}}$ である。

(3) $a>0$ とする。2 次関数 $y=x^2-6x+11$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値が 11，最小値が 2 ならば，a の値の範囲は $\boxed{\text{ソ}} \leqq a \leqq \boxed{\text{タ}}$ である。

(4) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=7$，$\mathrm{AC}=8$ のとき，$\angle\mathrm{A}=\boxed{\text{チ}}^\circ$ である。また，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) 高さが 4cm の円柱がある。その表面積は，半径 4cm の球の表面積に等しい。このとき円柱の表面積は $\boxed{\text{テ}}\,\mathrm{cm}^2$ であり，その底面の半径は $\boxed{\text{ト}}\,\mathrm{cm}$ である。

[3] 2 次曲線 $C_1 : y=-x^2+2x$ の x 軸との 2 交点は原点 O と $\mathrm{A}(\boxed{\text{ナ}},\ 0)$ である。C_1 を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動した曲線を C_2 とする。C_2 と x 軸との 2 交点を P，Q とすると，P と Q の間の距離は q を用いると $\boxed{\text{ニ}}$ である。従って P と Q の距離が 4 であるならば，$q=\boxed{\text{ヌ}}$ である。このとき P，Q の一方が O，A の間にあるのは $\boxed{\text{ネ}\quad < p <\quad}$ または $\boxed{\text{ノ}\quad < p <\quad}$ のときである。

[4] $\triangle\mathrm{ABC}$ は，辺 AC と BC の長さが 2 である二等辺三角形で，$90^\circ < \angle\mathrm{C} < 180^\circ$ とする。$\sin\angle\mathrm{A}$，$\cos\angle\mathrm{A}$ は，2 次方程式 $2x^2-(1+\sqrt{3})x+k=0$ の解であるとき，$k=\boxed{\text{ハ}}$ であり，$\angle\mathrm{A}=\boxed{\text{ヒ}}^\circ$ である。このとき，$\mathrm{AB}=\boxed{\text{フ}}$ であり，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 $\boxed{\text{ヘ}}$ である。

解答例

[1] (1) $\dfrac{4}{5-\sqrt{3}}=\dfrac{4(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3})(5+\sqrt{3})}=\dfrac{4(5+\sqrt{3})}{25-3}=\boldsymbol{\dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}}$

ここで　$2\sqrt{3}=\sqrt{12}$，$3<\sqrt{12}<4$

したがって　$\dfrac{10+3}{11}<\dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}<\dfrac{10+4}{11}$

よって，その整数部分は　**1**

(答) ア. $\dfrac{10+2\sqrt{3}}{11}$　イ. 1

(2) 2 次方程式 $x^2+(2a+1)x+a^2-1=0$ の判別式 D は

$$D=(2a+1)^2-4\cdot 1\cdot(a^2-1)=4a+5$$

この 2 次方程式が実数解をもつとき，$D \geqq 0$ であるから

$$4a+5 \geqq 0 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{a \geqq -\frac{5}{4}}$$

とくに重解をもつとき　$D=0$　すなわち　$a=-\dfrac{5}{4}$

したがって，その重解は

$$\begin{aligned} x &= -\frac{2a+1}{2\cdot 1}=-\frac{1}{2}(2a+1) \\ &= -\frac{1}{2}\left\{2\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+1\right\}=\boldsymbol{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

(答) ウ. $-\dfrac{5}{4}$　エ. $\dfrac{3}{4}$

(3) 与えられた不等式から　$|2x-4|<x+3$

したがって　$-(x+3)<2x-4<x+3$

これを解いて　$\boldsymbol{\dfrac{1}{3}<x<7}$

(答) オ. $\dfrac{1}{3}$　カ. 7

(4) 放物線 $y=2x^2-3x+2\cdots$ ① を平行移動した放物線の方程式は

$$y=2x^2+bx+c$$

とおける．これが，2 点 (1, 6)，(3, 0) を通るから

$$6=2\cdot1^2+b\cdot1+c,\quad 0=2\cdot3^2+b\cdot3+c$$

すなわち　$b+c=4$，$3b+c=-18$

これを解いて　$b=-11$，$c=15$

ゆえに，平行移動後の放物線の方程式は

$$y=2x^2-11x+15\cdots ②$$

放物線 ① の頂点の座標は

$$\left(-\frac{-3}{2\cdot2},-\frac{(-3)^2-4\cdot2\cdot2}{4\cdot2}\right)\quad すなわち\quad \left(\frac{3}{4},\ \frac{7}{8}\right)$$

また，放物線 ② の頂点の座標は

$$\left(-\frac{-11}{2\cdot2},-\frac{(-11)^2-4\cdot2\cdot15}{4\cdot2}\right)\quad すなわち\quad \left(\frac{11}{4},-\frac{1}{8}\right)$$

よって　$p=\dfrac{11}{4}-\dfrac{3}{4}=\mathbf{2}$，　$q=-\dfrac{1}{8}-\dfrac{7}{8}=\mathbf{-1}$

(答) キ．2　ク．-1

(5) 正弦定理により　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=2\cdot\sqrt{2}$

ゆえに　$a=2\sqrt{2}\sin135^\circ=\mathbf{2}$，$b=2\sqrt{2}\sin30^\circ=\sqrt{2}$

第 1 余弦定理により

$$c=a\cos B+b\cos A=2\cos30^\circ+\sqrt{2}\cos135^\circ=\boldsymbol{\sqrt{3}-1}$$

(答) ケ．2　コ．$\sqrt{3}-1$

第 1 余弦定理

$a=b\cos C+c\cos B$，$b=c\cos A+a\cos C$，$c=a\cos B+b\cos A$

なお，余弦定理とは，第 2 余弦定理のことである．

[2] (1) $\quad 2(a+1)x^2+(2a^2-a+1)x-2a^2+3a-1$

$=2(a+1)x^2+(2a^2-a+1)x-(a-1)(2a-1)$

$=\{2x+(2a-1)\}\{(a+1)x-(a-1)\}$

$=\boldsymbol{(2x+2a-1)(ax+x-a+1)}$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 2a-1 & \longrightarrow \quad 2a^2+a-1 \\ a+1 & -(a-1) & \longrightarrow \quad -2a+2 \\ \hline 2(a+1) & -(a-1)(2a-1) & 2a^2-a+1 \end{array}$$

(答) サ．シ．$2x+2a-1$，$ax+x-a+1$

(2) 2 つの 2 次関数 $y=x^2+ax+2a$，$y=x^2-ax+a^2-3$ がともに x 軸と異なる 2 点で交わるので，係数について

$$a^2-4{\cdot}1{\cdot}2a>0 \quad \text{かつ} \quad (-a)^2-4{\cdot}1{\cdot}(a^2-3)>0$$

したがって，連立不等式 $\begin{cases} a^2-8a>0 \\ a^2-4<0 \end{cases}$ の解を求めればよい．

第 1 式から $\quad a<0,\ 8<a \quad \cdots①$

第 2 式から $\quad -2<a<2 \quad \cdots②$

よって，①，② の共通範囲を求めて $\quad \boldsymbol{-2<a<0}$

(答) ス．-2　セ．0

(3) $y=x^2-6x+11$ の右辺を変形すると

$$y=(x-3)^2+2$$

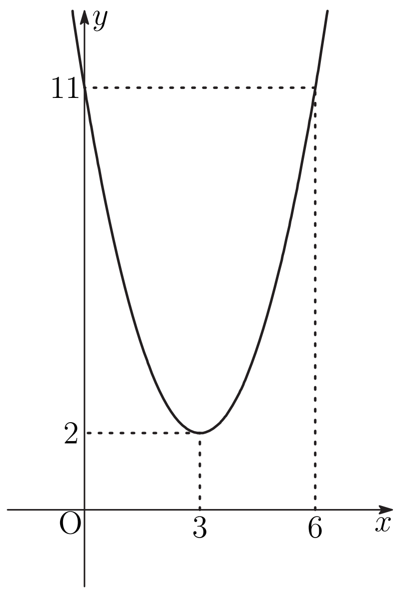
$y=11$ となるときの x の値は

$$x=0,\ 6$$

$0 \leqq x \leqq a$ において，この 2 次関数の最大値が 11，最小値が 2 であるための a の値の範囲は，右のグラフから

$$\boldsymbol{3 \leqq a \leqq 6}$$

(答) ソ．3　タ．6



(4) $a=7$，$b=8$，$c=5$ であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8^2+5^2-7^2}{2\cdot 8\cdot 5}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}$$

ゆえに　$\boldsymbol{A=60^\circ}$

また，$\triangle$ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\sin 60^\circ=\boldsymbol{10\sqrt{3}}$$

(答) チ．60　ツ．$10\sqrt{3}$

(5) 半径 4cm の球の表面積は　$4\pi\cdot 4^2=\boldsymbol{64\pi}$ [cm^2]
円柱の半径を r cm とすると，その表面積は

$$2\times\pi r^2+2\pi r\cdot 4=(2r^2+8r)\pi \quad [\mathrm{cm}^2]$$

球と円柱の表面積が等しいので

$$(2r^2+8r)\pi=64\pi \quad \text{すなわち} \quad r^2+4r-32=0$$

$r>0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{r=4}$

(答) テ．64π　ト．4

[3] C_1 と x 軸との共有点の x 座標は

$$-x^2+2x=0 \quad これを解いて \quad x=0,\ \mathbf{2}$$

$C_1 : y=-(x-1)^2+1$ であるから，これを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものが

$$C_2 : y-q=-(x-p-1)^2+1$$

であるから，C_2 と x 軸との交点 P，Q の x 座標は

$$-q=-(x-p-1)^2+1 \quad ゆえに \quad (x-p-1)^2=q+1$$

ゆえに　　$x=p+1\pm\sqrt{q+1}$　$\cdots$①

これが，P，Q の x 座標であるから，

$$\mathrm{PQ}=(p+1+\sqrt{q+1})-(p+1-\sqrt{q+1})=2\sqrt{q+1}$$

PQ=4 のとき　　$2\sqrt{q+1}=4$　これを解いて　$\boldsymbol{q=3}$

このとき，① より，P，Q の x 座標は　$p-1,\ p+3$

したがって，P，Q の一方が O，A の間にあるのは

$$p-1<0<p+3<2 \quad または \quad 0<p-1<2<p+3$$

ゆえに　　$\boldsymbol{-3<p<-1}$　または　$\boldsymbol{1<p<3}$

(答) ナ．2　ニ．$2\sqrt{q+1}$　ヌ．3　ネ．ノ．$-3<p<-1,\ 1<p<3$

[4] $a=b=2$ の二等辺三角形であるから　$A=B$

ゆえに　　$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-2A$　$\cdots$①

$90^\circ<C<180^\circ$ であるから

$$90^\circ<180^\circ-2A<180^\circ \quad \text{ゆえに} \quad 0^\circ<A<45^\circ \quad \cdots②$$

$\sin A$，$\cos A$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$$(x-\sin A)(x-\cos A)=0$$

すなわち　　$x^2-(\sin A+\cos A)x+\sin A\cos A=0$

これが，$2x^2-(1+\sqrt{3})x+k=0\cdots$③ に一致するので，$x^2$ の係数に注意して

$$\sin A+\cos A=\frac{1+\sqrt{3}}{2},\quad \sin A\cos A=\frac{k}{2}$$

上の 2 式を $(\sin A+\cos A)^2-2\sin A\cos A=1$ に代入すると

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\frac{k}{2}=1 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{k=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

これを ③ に代入して整理すると　$(2x-1)(x-\sqrt{3})=0$

したがって，この方程式の解は　　$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

② により　$\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$，$\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ゆえに　$\boldsymbol{A=30^\circ}$

これを ① に代入して　　$C=120^\circ$

正弦定理より　$\dfrac{2}{\sin 30^\circ}=\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin 120^\circ}$　これを解いて　$\mathrm{AB}=\boldsymbol{2\sqrt{3}}$

また，△ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2\sin 120^\circ=\boldsymbol{\sqrt{3}}$$

(答) ハ．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　ヒ．30　フ．$2\sqrt{3}$　ヘ．$\sqrt{3}$