熊本県立技術短期大学校

推薦入学(後期)試験問題

数学I(90分)

平成22年11月28日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙および解答用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

平成 23 年度　熊本県立技術短期大学校推薦 (後期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) 勝手な x に対して，$(2x-a)(x+a) = 2x^2+bx-6$ が成り立つならば $a = \boxed{\text{ア}}$，$b = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(a-3)^2}$ の根号をはずし簡単にすると $\boxed{\text{ウ}}a - \boxed{\text{エ}}$ となる。ただし，$1 < a < 3$ とする。

(3) 放物線 $y = x^2+ax+b$ の頂点が $(2,-4)$ であるとき，$a = \boxed{\text{オ}}$，$b = \boxed{\text{カ}}$ である。

(4) $6x^2+ax-2=0$ の 1 つの解が $\dfrac{1}{2}$ であるとき，$a = \boxed{\text{キ}}$ であり，もう 1 つの解は $x = \boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $\triangle$ABC において，AB $= 2\sqrt{3}$，BC $= 3\sqrt{3}$，CA $= \sqrt{57}$ ならば，$\cos\angle$B $= \boxed{\text{ケ}}$ であるので，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) $2x^2-5xy-3y^2+11x+9y-6$ を因数分解すると $(\boxed{\text{サ}})\times(\boxed{\text{シ}})$ である。

(2) 2 次関数 $y = 2x^2-8x+k$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値が 5 であるとき，$k = \boxed{\text{ス}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) すべての実数 x に対して 2 次不等式 $x^2+2(k+1)x+4>0$ が成り立つような定数 k の範囲は $\boxed{\text{ソ}} < k < \boxed{\text{タ}}$ である。

(4) $\triangle$ABC において，AB $= 1+\sqrt{3}$，BC $= 2$ とする。$\angle$B $= 60^\circ$ のとき，AC $= \boxed{\text{チ}}$，$\angle$A $= \boxed{\text{ツ}}^\circ$ である。

(5) 半径 4cm の鉄球がある。この鉄球を溶かして 8 個の鉄球をつくるとき，その半径は $\boxed{\text{テ}}$ cm である。新しくできた鉄球の表面積の合計は，もと鉄球の $\boxed{\text{ト}}$ 倍である。

[3] 長方形 ABCD において，2 点 A，B が x 軸上にあり，2 点 C，D が放物線 Γ : $y = -2x^2-4x+10$ 上にあるとする。ただし点 B の x 座標が点 A の x 座標より大きいとする。このとき，AB $= a$ とすると，点 B の x 座標は $\boxed{\text{ナ}}$ であるから，長方形 ABCD の面積は $\boxed{\text{ニ}}$ である。また Γ の頂点を E とすると，$\triangle$EDC の面積は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。従って長方形 ABCD の面積が $\triangle$EDC の面積より大きくなるのは $0 < a < \boxed{\text{ネ}}$ のときである。

[4] $\triangle$ABC において，$\angle$A の 2 等分線と BC の交点を D とし，$\angle$A $= 60^\circ$，DC $= 2$ とする．$\theta = \angle$C とおくと，$0 < \sin\theta \leqq \boxed{\text{ノ}}$ であるので，AD の長さは $\theta = \boxed{\text{ハ}}^\circ$ のとき最大値 $\boxed{\text{ヒ}}$ をとる。このとき，BD $= \boxed{\text{フ}}$，AB $= \boxed{\text{ヘ}}$ である。

解答例

[1] (1) 等式の左辺を展開し，x について整理すると

$$2x^2+(-a+4)x-2a=2x^2+bx-6$$

上式は，x に関する恒等式であるから，同じ次数の項の係数は等しいから

$$-a+4=b,\quad -2a=-6$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=3,\ b=1}$

(答) ア．3　イ．1

(2) $\sqrt{(a-1)^2}-\sqrt{(a-3)^2}=|a-1|-|a-3|$

$1<a<3$ であるから

$$|a-1|=a-1,\quad |a-3|=-(a-3)=-a+3$$

よって　　(与式) $=(a-1)-(-a+3)=\boldsymbol{2a-4}$

(答) ウ．2　エ．4

(3) 放物線の頂点の座標が $(2,-4)$ であるから，x^2 の係数に注意して

$$y=(x-2)^2-4\quad \text{ゆえに}\quad y=x^2-4x$$

上式と $y=x^2+ax+b$ の係数を比較して　$\boldsymbol{a=-4,\ \ b=0}$

(答) オ．-4　カ．0

(4) $x=\dfrac{1}{2}$ は方程式 $6x^2+ax-2=0$ の解であるから

$$6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+a\times\frac{1}{2}-2=0\quad \text{これを解いて}\quad \boldsymbol{a=1}$$

このとき，方程式は $6x^2+x-2=0$ であるから

$$(2x-1)(3x+2)=0\quad \text{これを解いて}\quad x=\frac{1}{2},-\frac{2}{3}$$

よって，もう1つの解は　$\boldsymbol{x=-\dfrac{2}{3}}$

(答) キ．1　ク．$-\dfrac{2}{3}$

(5) $a=3\sqrt{3}$，$b=\sqrt{57}$，$c=2\sqrt{3}$ であるから，余弦定理により

$$\begin{aligned}\cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{(2\sqrt{3})^2+(3\sqrt{3})^2-(\sqrt{57})^2}{2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}} \\ &= \frac{12+27-57}{36} = \boldsymbol{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

したがって　　$B=120^\circ$

よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

(答) ケ．$-\dfrac{1}{2}$　コ．$\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

[2] (1) (x に注目する)

$$\begin{aligned}&2x^2-5xy-3y^2+11x+9y-6\\ =&2x^2+(-5y+11)x-3(y-1)(y-2)\\ =&\{x-3(y-2)\}\{2x+(y-1)\}\\ =&\boldsymbol{(x-3y+6)(2x+y-1)}\end{aligned}$$

(答) サ．シ．$x-3y+6$，$2x+y-1$

(2) $y=2x^2-8x+k$ を変形すると　$y=2(x-2)^2+k-8$

$0\leqq x\leqq 3$ において，

$$x=0 \text{ で最大値 } k,\ x=2 \text{ で最小値 } k-8$$

をとる．

したがって，最大値が 5 であるから　$\boldsymbol{k=5}$

最小値は　$k-8=5-8=\boldsymbol{-3}$

(答) ス．5　セ．-3

(3) すべての x について $x^2+2(k+1)x+4>0$ が成り立つとき，x^2 の係数が正であるから，係数について $D/4<0$ をみたすので

$$(k+1)^2-1\cdot 4<0 \quad \text{ゆえに} \quad (k+3)(k-1)<0$$

これを解いて　$\boldsymbol{-3<k<1}$

(答) ソ．-3　タ．1

(4) $c=1+\sqrt{3}$, $a=2$, $B=60^\circ$ であるから，余弦定理により

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2+a^2-2ca\cos B \\ &= (1+\sqrt{3})^2+2^2-2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2\times\frac{1}{2} \\ &= (4+2\sqrt{3})+4-2(1+\sqrt{3}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

$b>0$ であるから　$b=\boldsymbol{\sqrt{6}}$　すなわち　$\mathrm{AC}=\sqrt{6}$
正弦定理により，$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ であるから

$$\frac{2}{\sin A}=\frac{\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} \quad ゆえに \quad \sqrt{6}\sin A = 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって　　$\sin A=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$B=60^\circ$ より，$A<120^\circ$ であるから　$A=45^\circ$

(答) チ．$\sqrt{6}$　ツ．45°

(5) 元の鉄球と溶かしてできた鉄球 1 個の体積比は

$$1:\frac{1}{8}=1:\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

よって，元の鉄球と溶かしてできた鉄球 1 個の相似比は

$$1:\frac{1}{2}$$

溶かしてできた鉄球 1 個の半径は　　$4\times\frac{1}{2}=\mathbf{2}$ [cm]
したがって，元の鉄球と溶かしてできた鉄球 1 個の表面積の比は

$$1:\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

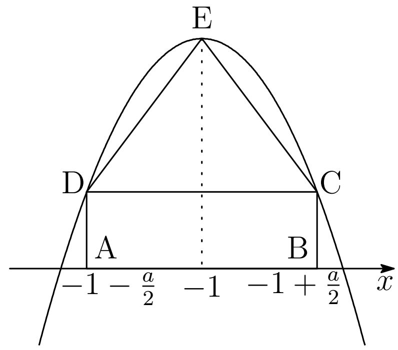
したがって，新しくできた鉄球の表面積の合計は元の鉄球の表面積の

$$8\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\mathbf{2}\ 倍$$

(答) テ．2　ト．2

[3] $\Gamma : y = -2x^2 - 4x + 10$ を変形すると

$$y = -2(x+1)^2 + 12$$



ゆえに，Γ の頂点は　E$(-1,\ 12)$
AB $= a$ のとき，右の図のように，
B の x 座標は　$\boldsymbol{-1+\dfrac{a}{2}}$
C の y 座標は

$$y = -2\left(-1+\frac{a}{2}+1\right)^2 + 12 = -\frac{a^2}{2} + 12$$

よって，長方形 ABCD の面積は　$\boldsymbol{a\left(-\dfrac{a^2}{2}+12\right)}$

△EDC の面積は　$\dfrac{1}{2}a\left\{12-\left(-\dfrac{a^2}{2}+12\right)\right\} = \boldsymbol{\dfrac{a^3}{4}}$

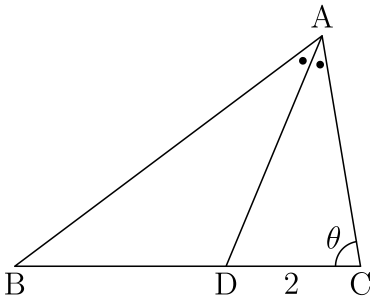
長方形 ABCD の面積が △EDC の面積より大きくなるとき，上の 2 式より

$$a\left(-\frac{a^2}{2}+12\right) > \frac{a^3}{4} \quad \text{ゆえに} \quad a(a+4)(a-4) < 0$$

このとき，$a > 0$ であるから　$\boldsymbol{0 < a < 4}$

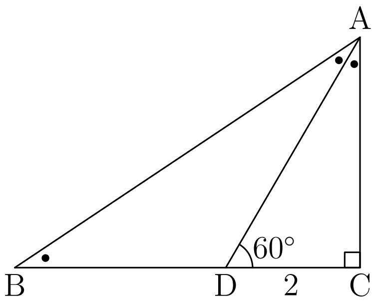
(答) ナ. $-1+\dfrac{a}{2}$　ニ. $a\left(-\dfrac{a^2}{2}+12\right)$　ヌ. $\dfrac{a^3}{4}$　ネ. 4

[4] △ADC に正弦定理を適用すると



$$\frac{\mathrm{AD}}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin 30^\circ}$$

ゆえに　AD $= 4\sin\theta$
また，$\boldsymbol{0 < \sin\theta \leqq 1}$ であるから
AD は $\boldsymbol{\theta = 90^\circ}$ のとき最大値 **4** をとる.



このとき，BD $=$ AD の二等辺三角形であるから　**BD = 4**
△ABD に正弦定理を適用すると

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{4}{\sin 30^\circ} \quad \text{よって} \quad \mathbf{AB} = \boldsymbol{4\sqrt{3}}$$

(答) ノ. 1　ハ. 90　ヒ. 4　フ. 4　ヘ. $4\sqrt{3}$