熊本県立技術短期大学校

推薦入学(後期)試験問題

数学I(90分)

平成21年11月29日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙および解答用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

平成 22 年度　熊本県立技術短期大学校推薦 (後期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) $(a-b-c+1)(a+1)+bc$ を因数分解すると $\left(\boxed{\text{ア}}\right)\times\left(\boxed{\text{イ}}\right)$ である。

(2) $x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$, $y=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ のとき, $x+y=\boxed{\text{ウ}}$, $x^2+y^2=\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) 不等式 $|\,x+2\,|>2\,|\,x-1\,|$ を解くと $\boxed{\text{オ}}<x<\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 2 次方程式 $(3a-10)x^2+4ax+a+1=0$ $\left(a\neq\dfrac{10}{3}\right)$ が異なる 2 つの実数解をもつのは $a<\boxed{\text{キ}}$ または $a>\boxed{\text{ク}}$ のときである。

(5) 2 次関数 $y=3(x+a)^2+b$ のグラフと, y 軸との交点の座標が $(0,-9)$ で, x 軸との交点の 1 つが $(1,\ 0)$ であるなら $a=\boxed{\text{ケ}}$, $b=\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) 2,000 円以内で, 1 本 150 円のジュースと 1 本 120 円の水を合計 15 本買うとき, ジュースをなるべく多く買うためには, ジュースを $\boxed{\text{サ}}$ 本, 水を $\boxed{\text{シ}}$ 本買えばよい。

(2) 2 次関数 $y=-2x^2-6x+3$ の $-2\leqq x\leqq 1$ における最大値は $\boxed{\text{ス}}$, 最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) $\triangle$ABC において $\angle\mathrm{A}=45^\circ$, $\angle\mathrm{B}=30^\circ$, $\mathrm{BC}=4$ ならば $\mathrm{CA}=\boxed{\text{ソ}}$ で, 3 点 A, B, C を通る円の半径は $\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) $90^\circ<\theta<180^\circ$ で $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ が成り立つとき, $\sin^3\theta+\cos^3\theta=\boxed{\text{チ}}$, $\sin\theta-\cos\theta=\boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) $y=\cos^2\theta+\sin\theta$ の $0^\circ\leqq\theta\leqq 45^\circ$ における最大値は $\boxed{\text{テ}}$, 最小値は $\boxed{\text{ト}}$ である。

[3] x, y が $x^2-2xy+2y^2=2$ をみたすとする。このとき, x のとり得る範囲は $\boxed{\text{ナ}}\leqq x\leqq\boxed{\text{ニ}}$ で, $4x^2+4xy-4y^2-2x+3$ の最小値は $\boxed{\text{ヌ}}$, 最大値は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

[4] $\triangle$ABC において $\mathrm{AB}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$, $\angle\mathrm{B}=30^\circ$, $\angle\mathrm{C}=90^\circ$ とする。長方形 PQRS の頂点 P, Q が辺 AB 上に, R が辺 BC 上に, S が辺 CA 上にあるとする。$\mathrm{QR}=x$ とおくと, x を用いて, $\mathrm{AP}=\boxed{\text{ノ}}$, $\mathrm{QB}=\boxed{\text{ハ}}$ であるから $\mathrm{PQ}=\boxed{\text{ヒ}}$ である。また x の範囲は $0<x<\boxed{\text{フ}}$ である。したがって長方形 PQRS の面積が最大となるのは $x=\boxed{\text{ヘ}}$ のときで, そのときの面積は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

解答例

[1] (1) $a+1=x$ とおくと

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x-b-c)x+bc\\ &= x^2-(b+c)x+bc\\ &= (x-b)(x-c)\\ &= \boldsymbol{(a-b+1)(a-c+1)}\end{aligned}$$

(答) ア．イ．$a-b+1,\ a-c+1$

(2) $$x+y=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{(2+\sqrt{2})^2+(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=\mathbf{6}$$

$$xy=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=1$$

したがって　$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=6^2-2\cdot 1=\mathbf{34}$

(答) ウ．6　エ．34

(3) $|x+2|>2|x-1|\geqq 0$ であるから

$$|x+2|^2>(2|x-1|)^2$$

ゆえに　$(x+2)^2>4(x-1)^2$

整理すると　$x^2-4x<0$

したがって　$x(x-4)<0$

よって　$\boldsymbol{0<x<4}$

(答) オ．0　カ．4

(4) $a\neq\dfrac{10}{3}$ より x^2 の係数について　$3a-10\neq 0$

与えられた2次方程式が異なる2つの実数解をもつとき　$D/4>0$

ゆえに　$(2a)^2-(3a-10)(a+1)>0$

整理して　$a^2+7a+10>0$

したがって　$(a+5)(a+2)>0$

よって　$\boldsymbol{a<-5,\ -2<a}$

(答) キ．-5　ク．-2

(5) 2 次関数 $y=3(x+a)^2+b$ のグラフについて

点 $(0,-9)$ を通るから　　$3a^2+b=-9$　　$\cdots$①

点 $(1,\ 0)$ を通るから　　$3(1+a)^2+b=0$　$\cdots$②

①，② を解いて　$\boldsymbol{a=1,\ b=-12}$

(答) ケ．1　コ．-12

[2] (1) ジュースを x 本買うとすると，水は $(15-x)$ 本買うことになる．

条件から　　$150x+120(15-x)\leqq 2000$

ゆえに　　$x\leqq \dfrac{20}{3}$

$\dfrac{20}{3}=6.6\cdots$ で，x は整数であるから　$x\leqq 6$

よって，ジュースを **6** 本，水を **9** 本買えばよい．

(答) サ．6　シ．9

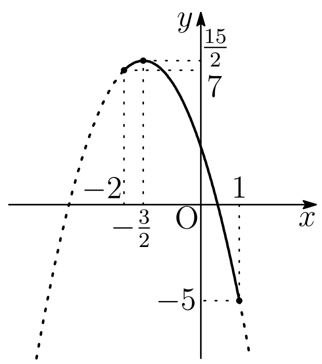
(2) $y=-2x^2-6x+3$ を変形すると

$$y=-2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}$$

$-2\leqq x\leqq 1$ でのグラフは，
右の図の実線部分である．
よって，y は

$x=-\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\boldsymbol{\dfrac{15}{2}}$ をとり，

$x=1$ で最小値 $\boldsymbol{-5}$ をとる．



(答) ス．$\dfrac{15}{2}$　セ．-5

(3) 外接円の半径を R とすると，正弦定理により

$$\frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{\mathrm{CA}}{\sin B} = 2R$$

よって　$\mathrm{CA}\sin 45^\circ = 4\sin 30^\circ$

$$\mathrm{CA} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 4 \times \frac{1}{2}$$

ゆえに　$\mathrm{CA} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

また　$R = \dfrac{\mathrm{BC}}{2\sin A} = \dfrac{4}{2\sin 45^\circ} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \mathbf{2\sqrt{2}}$

(答) ソ．$2\sqrt{2}$　タ．$2\sqrt{2}$

(4) $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{2}$ の両辺を平方すると

$$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$

ゆえに　$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{4}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{3}{8}$

よって

$$\begin{aligned}\sin^3\theta + \cos^3\theta &= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)\\ &= (\sin\theta + \cos\theta)(1 - \sin\theta\cos\theta)\\ &= \frac{1}{2} \times \left\{1 - \left(-\frac{3}{8}\right)\right\} = \mathbf{\frac{11}{16}}\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}(\sin\theta - \cos\theta)^2 &= \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta\\ &= 1 - 2\sin\theta\cos\theta\\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4}\end{aligned}$$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より，$\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$ であるから　$\sin\theta - \cos\theta > 0$

よって　$\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{\dfrac{7}{4}} = \mathbf{\dfrac{\sqrt{7}}{2}}$

(答) チ．$\dfrac{11}{16}$　ツ．$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

(5) $\cos^2\theta + \sin\theta = -\sin^2\theta + \sin\theta + 1$ であるから

$\sin\theta = x$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ より

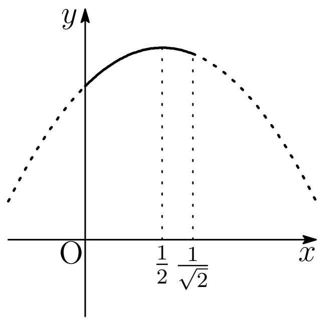
$$y = -x^2 + x + 1 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4} \quad \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

よって

$x = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$\theta = 30^\circ$ のとき　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$

$x = 0$　すなわち　$\theta = 0^\circ$ のとき　**最小値** $\mathbf{1}$

(答) テ．$\dfrac{5}{4}$　ト．1



[3] $x^2 - 2xy + 2y^2 = 2$ を y について整理すると　$2y^2 - 2xy + x^2 - 2 = 0$

y は実数であるから，y に関する 2 次方程式の係数について

$$(-2x)^2 - 4\cdot 2(x^2 - 2) \geqq 0$$

整理すると　$x^2 - 4 \leqq 0$

ゆえに　$(x+2)(x-2) \leqq 0$

したがって　$\boldsymbol{-2 \leqq x \leqq 2}$

$x^2 - 2xy + 2y^2 = 2$ から　$2xy - 2y^2 = x^2 - 2$　$\cdots$ ①

① から

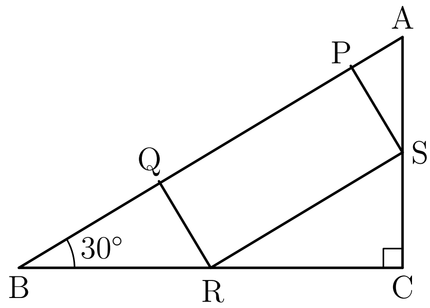
$$\begin{aligned} 4x^2 + 4xy - 4y^2 - 2x + 3 &= 4x^2 + 2(2xy - 2y^2) - 2x + 3 \\ &= 4x^2 + 2(x^2 - 2) - 2x + 3 \\ &= 6x^2 - 2x - 1 \\ &= 6\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{7}{6} \end{aligned}$$

したがって，$-2 \leqq x \leqq 2$ において，上式は

$x = \dfrac{1}{6}$ で最小値 $\boldsymbol{-\dfrac{7}{6}}$ をとり，$x = -2$ で最大値 **27** をとる．

(答) ナ．-2　ニ．2　ヌ．$-\dfrac{7}{6}$　ネ．27

[4] $\mathrm{QR} = \mathrm{PS} = x$ であるから，直角三角形 APS および直角三角形 BQR について



$$\mathrm{AP} = \mathrm{PS}\tan\angle\mathrm{ASP} = x\tan 30^\circ = x \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \boldsymbol{\frac{x}{\sqrt{3}}}$$

$$\mathrm{QB} = \mathrm{QR}\tan\angle\mathrm{BRQ} = x\tan 60^\circ = x \times \sqrt{3} = \boldsymbol{\sqrt{3}\,x}$$

ゆえに　$\mathrm{PQ} = \mathrm{AB} - (\mathrm{AP} + \mathrm{QB}) = \dfrac{8\sqrt{3}}{3} - \left(\dfrac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\,x\right) = \boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}(2-x)}{3}}$

$\mathrm{AP} > 0$，$\mathrm{PQ} > 0$ であるから

$$x > 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{4\sqrt{3}(2-x)}{3} > 0 \qquad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{0 < x < 2} \quad \cdots ①$$

長方形 PQRS の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \mathrm{QR} \times \mathrm{PQ} \\ &= x \times \frac{4\sqrt{3}(2-x)}{3} \\ &= -\frac{4\sqrt{3}}{3}(x^2 - 2x) \\ &= -\frac{4\sqrt{3}}{3}(x-1)^2 + \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

① において，S は $\boldsymbol{x = 1}$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{4\sqrt{3}}{3}}$ をとる.

(答) ノ. $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$　ハ. $\sqrt{3}\,x$　ヒ. $\dfrac{4\sqrt{3}(2-x)}{3}$　フ. 2　ヘ. 1　ホ. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$