熊本県立技術短期大学校

推薦入学(後期)試験問題

数学I(90分)

平成20年11月30日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙および解答用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

平成 21 年度　熊本県立技術短期大学校推薦 (後期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) $2a^2+ab+5ac-b^2-bc+2c^2$ を因数分解すると $\boxed{\text{ア}}\times\boxed{\text{イ}}$ となる。

(2) a を有理数とするとき，$x=\dfrac{\sqrt{3}+a}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$ が有理数となる a の値は $a=\boxed{\text{ウ}}$ で，そのときの x の値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $y=-x^2+4x+3$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフは $y=-x^2-\boxed{\text{オ}}x+\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) $90^\circ<\theta<180^\circ$ とする。$\dfrac{3}{2}\tan\theta=\cos\theta$ のとき，$\sin\theta=\boxed{\text{キ}}$ で $\theta=\boxed{\text{ク}}^\circ$ である。

(5) 半径が r cm の球の体積が，底面の直径 8cm で高さ $\dfrac{2}{3}$cm の円柱の体積と等しいならば，$r=\boxed{\text{ケ}}$cm で球の表面積は $\boxed{\text{コ}}$cm^2 である。

[2] (1) $y=x^2-2mx+2m^2-m$ のグラフと x 軸との共有点の個数は 2 で，共有点の x 座標が正であるならば，定数 m の範囲は $\boxed{\text{サ}}<m<\boxed{\text{シ}}$ である。

(2) $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$2x+y=1$ のとき，$2x^2+y^2$ の最小値は $\boxed{\text{ス}}$，最大値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) 2 次方程式 $-2x^2-4x+p-1=0$ の 1 つの解が -2 以下で，もう 1 つの解が 1 以下であるならば，定数 p の範囲は $\boxed{\text{ソ}}\leqq p\leqq\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) $\cos 160^\circ+\sin 70^\circ$ の値は $\boxed{\text{チ}}$ であり，$\cos 135^\circ\times\sin 120^\circ$ の値は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) $\triangle$ABC において $\angle$B $=45^\circ$，$\angle$C $=60^\circ$ ならば，AB : BC : CA $=\boxed{\text{テ}}:\boxed{\text{ト}}:1$ である。

[3] 関数 $y=(2x^2+4x)^2+3(2x^2+4x)+1+a$ において，$t=2x^2+4x+1$ とおき，y を t の式で表わすと $y=\boxed{\text{ナ}}$ である。y の最小値が $\dfrac{3}{4}$ であるならば $a=\boxed{\text{ニ}}$ である。この a の値に対して，$-1\leqq x\leqq 1$ における y の最小値は $\boxed{\text{ヌ}}$，最大値は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

[4] 半径 2 の円周上に 3 点 A，B，C がある。点 A は固定され，2 点 B，C は $\angle$BAC $=60^\circ$ の関係を保ちながら円周上を動くとする。このとき，BC $=\boxed{\text{ノ}}$ である。AB $=$ AC となるときの $\triangle$ABC の面積を S_1 とすると $S_1=\boxed{\text{ハ}}$ となる。また，AC $=k$AB となるとき，AB^2 は k を用いて AB$^2=\boxed{\text{ヒ}}$ と書けるから，このときの $\triangle$ABC の面積 S_2 は $S_2=\boxed{\text{フ}}$ である。とくに，$k=2$ ならば，$S_2=\boxed{\text{ヘ}}\times S_1$ である。

解答例

[1] (1) a について整理して因数分解する．

$$
\begin{aligned}
&2a^2+ab+5ac-b^2-bc+2c^2\\
&=2a^2+(b+5c)a-(b^2+bc-2c^2)\\
&=2a^2+(b+5c)a-(b+2c)(b-c)\\
&=\{a+(b+2c)\}\{2a-(b-c)\}\\
&=\boldsymbol{(a+b+2c)(2a-b+c)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & b+2c & \longrightarrow & 2b+4c\\
2 & -(b-c) & \longrightarrow & -b+c\\
\hline
2 & -(b+2c)(b-c) & & b+5c
\end{array}
$$

(答) ア．イ．$(a+b+2c)$，$(2a-b+c)$

(2) 分母を有理化して整理する．

$$
\begin{aligned}
x&=\frac{\sqrt{3}+a}{\sqrt{3}-1}+\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}+a)(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}+\frac{(3-\sqrt{3})^2}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}\\
&=\frac{a+7}{2}+\frac{a-1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$\dfrac{a+7}{2}$，$\dfrac{a-1}{2}$ は有理数であるから

x が有理数であるとき　$\dfrac{a-1}{2}=0$　これを解いて　$\boldsymbol{a=1}$

このとき　$\boldsymbol{x=4}$

(答) ウ．1　エ．4

(3) $y=-x^2+4x+3$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフは

$$y-2=-(x+3)^2+4(x+3)+3$$

よって　$y=-x^2-\boldsymbol{2}x+\boldsymbol{8}$

(答) オ．2　カ．8

(4) $\dfrac{3}{2}\tan\theta=\cos\theta$ を変形すると

$$
\begin{aligned}
3\sin\theta&=2\cos^2\theta\\
2\sin^2\theta+3\sin\theta-2&=0\\
(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)&=0
\end{aligned}
$$

$90^\circ<\theta<180^\circ$ より，$0<\sin\theta<1$ であるから

$\sin\theta=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$　ゆえに　$\theta=\boldsymbol{150^\circ}$

(答) キ．$\dfrac{1}{2}$　ク．150°

(5) 題意から　$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi \cdot 4^2 \times \frac{2}{3}$

整理して　$r^3 = 8$　これを解いて　$\boldsymbol{r = 2}$ (cm)

ゆえに，球の表面積は　$4\pi \cdot 2^2 = \boldsymbol{16\pi}$ (cm^2)

(答) ケ．2　コ．16π

[2] (1) $y = x^2 - 2mx + 2m^2 - m$ を変形すると　$y = (x-m)^2 + m^2 - m$

グラフは，下に凸の放物線で，x 軸との共有点の個数が 2 個であるから

$$m^2 - m < 0 \quad \text{これを解いて} \quad 0 < m < 1 \quad \cdots ①$$

共有点の x 座標が正であるから　$m > 0$　$\cdots ②$

①，② の共通部分を求めて　$\boldsymbol{0 < m < 1}$

(答) サ．0　シ．1

(2) $y = 1 - 2x \cdots ①$ であるから，$y \geqq 0$ より

$$1 - 2x \geqq 0$$

$x \geqq 0$ に注意して　$0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$　$\cdots ②$

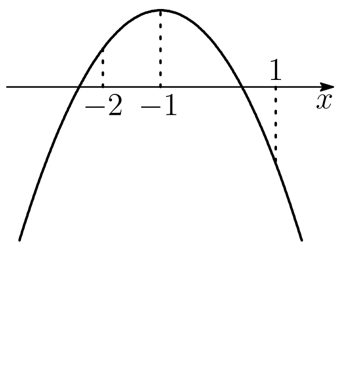
① より　
$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 &= 2x^2 + (1-2x)^2 \\ &= 6\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

③ は ② において，$x = \frac{1}{3}$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{1}{3}}$ をとり，$x = 0$ で最大値 $\mathbf{1}$ をとる．

(答) ス．$\frac{1}{3}$　セ．1

(3) $f(x) = -2x^2 - 4x + p - 1$ とおくと

$$f(x) = -2(x+1)^2 + p + 1$$



1 つの解が -2 以下で，もう 1 つの解が 1 以下であるから，右のグラフから

$$f(-2) \geqq 0, \ f(1) \leqq 0$$

ゆえに　$\begin{cases} -2(-2)^2 - 4(-2) + p - 1 \geqq 0 \\ -2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + p - 1 \leqq 0 \end{cases}$

これを解いて　$\boldsymbol{1 \leqq p \leqq 7}$

(答) ソ．1　タ．7

(4) $\cos 160^\circ = -\cos 20^\circ$, $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ であるから

$$\cos 160^\circ + \sin 70^\circ = (-\cos 20^\circ) + \cos 20^\circ = \mathbf{0}$$

また $$\cos 135^\circ \times \sin 120^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

(答) チ. 0　ツ. $-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(5) $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$

正弦定理により

$$\begin{aligned}
\mathrm{AB} : \mathrm{BC} : \mathrm{CA} &= \sin C : \sin A : \sin B \\
&= \sin 60^\circ : \sin 75^\circ : \sin 45^\circ \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} : \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2} : \frac{\sqrt{3}+1}{2} : 1}
\end{aligned}$$

(答) テ. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　ト. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

[3] $t=2x^2+4x+1$ より，$t=2(x+1)^2-1 \quad \cdots ①$

ゆえに　　$t \geqq -1 \quad \cdots ②$

$2x^2+4x=t-1$ であるから

$$\begin{aligned} y &= (2x^2+4x)^2+3(2x^2+4x)+1+a \\ &= (t-1)^2+3(t-1)+1+a \\ &= \boldsymbol{t^2+t-1+a} \\ &= \left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}+a \end{aligned}$$

y の最小値が $\dfrac{3}{4}$ であるから，② に注意して

$$-\frac{5}{4}+a=\frac{3}{4} \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{a=2}$$

$-1 \leqq x \leqq 1$ において，① から　　$-1 \leqq t \leqq 7$

また，$y=t^2+t+1$ であるから，このとき

$$t=-\frac{1}{2} \text{ で最小値 } \boldsymbol{\frac{3}{4}},\ t=7 \text{ で最大値 } \boldsymbol{57}$$

をとる．

(答) ナ．$t^2+t-1+a$　ニ．2　ヌ．$\dfrac{3}{4}$　ネ．57

[4] 正弦定理により　$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin\angle\mathrm{BAC}} = 2R$

ゆえに　$\mathrm{BC} = 2R\sin\angle\mathrm{BAC}$

$= 2\cdot 2\sin 60^\circ$

$= 2\cdot 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{2\sqrt{3}}$

$\mathrm{AB} = \mathrm{AC}$ となるとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ は一辺の長さが $2\sqrt{3}$ の正三角形であるから

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} \times \sin 60^\circ = \boldsymbol{3\sqrt{3}}$$

余弦定理により　$\mathrm{BC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - \mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos\angle\mathrm{BAC}$

ゆえに　$(2\sqrt{3})^2 = \mathrm{AB}^2 + (k\mathrm{AB})^2 - 2\mathrm{AB}\cdot k\mathrm{AB}\cos 60^\circ$

したがって　$12 = (1 + k^2 - k)\mathrm{AB}^2$

よって　$\mathrm{AB}^2 = \boldsymbol{\dfrac{12}{k^2 - k + 1}}$　$\cdots$ ①

このとき　$S_2 = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin 60^\circ = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot k\mathrm{AB}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}k\mathrm{AB}^2}{4}$

① より　$= \boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}k}{k^2 - k + 1}}$

$k = 2$ のとき，$S_2 = 2\sqrt{3}$ であるから　$S_2 = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}} \times S_1$

(答) ノ．$2\sqrt{3}$　ハ．$3\sqrt{3}$　ヒ．$\dfrac{12}{k^2 - k + 1}$　フ．$\dfrac{3\sqrt{3}k}{k^2 - k + 1}$　ヘ．$\dfrac{2}{3}$