熊本県立技術短期大学校

推薦入学(後期)試験問題

数学I(90分)

平成19年11月25日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題用紙および解答用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、筆記用具、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能を持つ機器及び音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

平成 20 年度　熊本県立技術短期大学校推薦 (後期) 入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) $(2x-3y)(x-y)(3x-2y)$ を展開すると $\boxed{\text{ア}}x^3-\boxed{\text{ア}}y^3-\boxed{\text{イ}}x^2y+\boxed{\text{イ}}xy^2$ である。

(2) 放物線 $y=2x^2-12x+22$ を平行移動して放物線 $y=2x^2+4x-3$ と重ねるためには x 軸方向に $\boxed{\text{ウ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$ だけ平行移動すればよい。

(3) 2 次関数 $y=a(x-2)^2+b$ $(a<0)$ の $1 \leqq x \leqq 4$ における最大値が 3 で最小値が 1 であるならば $a=\boxed{\text{オ}}$，$b=\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 連立 2 次不等式 $\begin{cases} x^2-4x+3 \leqq 0 \\ x^2-2x-1 \leqq 0 \end{cases}$ の解は $\boxed{\text{キ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $90^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\sin\theta=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta=\boxed{\text{ケ}}$，$\tan\theta=\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) $x^2+3xy+2y^2+2x+y-3$ を因数分解すると，$\left(\boxed{\text{サ}}\right)\times\left(\boxed{\text{シ}}\right)$ である。

(2) 2 次関数 $y=x^2-4x+a$ の定義域が $0 \leqq x \leqq 3$ で，その最大値と最小値の和が -2 であるとき，$a=\boxed{\text{ス}}$，最小値は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) 2 次方程式 $3x^2+2ax+2a-3=0$ は $a=\boxed{\text{ソ}}$ のとき，ただ 1 つの実数解を持つ。また，すべての解が 3 より小さいのは $a>\boxed{\text{タ}}$ のときである。

(4) 長さ 3 のひもを長方形の形にしたときの短辺の長さを a，長辺の長さを b とすると，$a+b=\boxed{\text{チ}}$ である。このとき，長方形の面積が $\dfrac{1}{2}$ 以下であるなら，$0 \leqq a \leqq \boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) $a=\cos 10^\circ$，$b=\sin 20^\circ$ を用いると

$\sin 160^\circ+\cos 170^\circ=\boxed{\text{テ}}$，　$\sin 80^\circ+\cos 110^\circ=\boxed{\text{ト}}$ と表される。

[3] O を原点，放物線 $y=-\sqrt{3}(4x^2-1)$ の頂点の座標を P とすると，PO の長さは $\boxed{\text{ナ}}$ である。x 軸上の 2 点 A，B を $\triangle$PAB が正三角形となるようにとるとき，辺 AB の長さは $\boxed{\text{ニ}}$ である。次に放物線上の点 Q と x 軸上の点 C，D を $\triangle$QCD が正三角形となるようにとる。Q の x 座標を a $\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$ とすると，辺 CD の長さは a を用いて $\boxed{\text{ヌ}}$ と表せる。したがって，CD の長さが AB の長さの $\dfrac{1}{2}$ となるのは，$a=\boxed{\text{ネ}}$ のときである。

[4] 面積が 24 である $\triangle$ABC の辺 AB，BC，CA 上にそれぞれ D，E，F を AD : DB = 1 : 3，BE : EC = 1 : 1，CF : FA = 2 : 1 となるようにとる。このとき $\triangle$ADF，$\triangle$BED，$\triangle$CFE の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3 とするとき，$S_1=\boxed{\text{ノ}}$，$S_2=\boxed{\text{ハ}}$，$S_3=\boxed{\text{ヒ}}$ である。また，$\triangle$DEF の面積は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) $(2x-3y)(x-y)(3x-2y)$
$=(x-y)\times(2x-3y)(3x-2y)$
$=(x-y)(6x^2-13xy+6y^2)$
$=x(6x^2-13xy+6y^2)-y(6x^2-13xy+6y^2)$
$=\mathbf{6}x^3-\mathbf{6}y^3-\mathbf{19}x^2y+\mathbf{19}xy^2$

(答) ア．6　イ．19

(2) $y=2x^2-12x+22$ を変形すると　$y=2(x-3)^2+4$
$y=2x^2+4x-3$ を変形すると　　$y=2(x+1)^2-5$
よって，頂点は $(3,\ 4)$ から $(-1,-5)$ に移動する．
したがって，第 2 式は，第 1 式を

x 軸方向に　$-1-3=\mathbf{-4}$,　　y 軸方向に　$-5-4=\mathbf{-9}$

だけ平行移動したものである．

(答) ウ．-4　エ．-9

(3) $a<0$ であるから，$1\leqq x\leqq 4$ において，2 次関数 $y=a(x-2)^2+b$ は，$x=2$ で最大値 b，$x=4$ で最小値 $4a+b$ をとるので

$$b=\mathbf{3},\ 4a+b=1\quad ゆえに\quad a=-\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

(答) オ．$-\dfrac{1}{2}$　カ．3

(4) 第 1 式から　$(x-1)(x-3)\leqq 0$　ゆえに　$1\leqq x\leqq 3$　$\cdots$①
2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解は $x=1\pm\sqrt{2}$ であるから
第 2 式の解は　　$1-\sqrt{2}\leqq x\leqq 1+\sqrt{2}$　$\cdots$②
①，② の共通範囲を求めて　$\mathbf{1}\leqq x\leqq \mathbf{1+\sqrt{2}}$

(答) キ．1　ク．$1+\sqrt{2}$

(5) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から　$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{8}{9}$

$90^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より　$\cos\theta\leqq 0$ であるから

$$\cos\theta=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{\mathbf{2\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{3}\div\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)=-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2\sqrt{2}}}$

(答) ケ．$-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　コ．$-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

[2] (1) x について整理して因数分解する．

$$
\begin{aligned}
&x^2+3xy+2y^2+2x+y-3\\
&=x^2+(3y+2)x+(2y^2+y-3)\\
&=x^2+(3y+2)x+(y-1)(2y+3)\\
&=\{x+(y-1)\}\{x+(2y+3)\}\\
&=\boldsymbol{(x+y-1)(x+2y+3)}
\end{aligned}
$$

1	$y-1$	$y-1$
1	$2y+3$	$2y+3$
1	$(y-1)(2y+3)$	$3y+2$

(答) サ．シ．$x+y-1$，$x+2y+3$

(2) $y=x^2-4x+a$ を変形して　$y=(x-2)^2+a-4$

$0 \leqq x \leqq 3$ において，$x=2$ で最小値 $a-4$ をとり，$x=0$ で最大値 a をとる．最大値と最小値の和が -2 であるから

$$a+(a-4)=-2 \quad \text{これを解いて} \quad a=\mathbf{1}$$

したがって，最小値は　$a-4=1-4=\mathbf{-3}$

(答) ス．1　セ．-3

(3) 2 次方程式 $3x^2+2ax+2a-3=0 \cdots (*)$ の判別式を D とすると

$$D/4=a^2-3(2a-3)=(a-3)^2 \quad \cdots ①$$

$(*)$ がただ 1 つの実数解をもつとき，$D=0$ であるから　$a=\mathbf{3}$

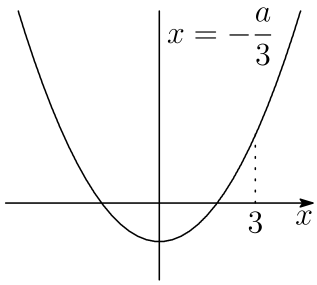
$f(x)=3x^2+2ax+2a-3$ とおくと

$y=f(x)$ の軸の方程式は　$x=-\dfrac{a}{3}$

このとき　$-\dfrac{a}{3}<3$　ゆえに　$a>-9$　$\cdots ②$

$f(3)>0$ であるから，$3\cdot 3^2+2a\cdot 3+2a-3>0$

これを解いて　$a>-3 \cdots ③$



① より，常に $D \geqq 0$ であるから

②，③ の共通範囲を求めて　$a>\mathbf{-3}$

(答) ソ．3　タ．-3

[**別解**] 2 次方程式 $3x^2+2ax+2a-3=0$ の左辺を因数分解すると

$$(x+1)(3x+2a-3)=0 \quad \text{これを解いて} \quad x=-1,\ 1-\frac{2a}{3}$$

これらの解が 3 より小さいので

$$1-\frac{2a}{3}<3 \quad \text{これを解いて} \quad a>-3$$

(4) 周の長さから　$2a+2b=3$　ゆえに　$a+b=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

このとき，$0<a<b$，$b=\frac{3}{2}-a$であるから　$0<a<\frac{3}{4}$　$\cdots$①

長方形の面積が$\frac{1}{2}$以下であるから　$ab \leqq \frac{1}{2}$

すなわち　$a\left(\frac{3}{2}-a\right) \leqq \frac{1}{2}$

ゆえに　$(a-1)(2a-1) \geqq 0$

①に注意して　$0<a \leqq \boldsymbol{\frac{1}{2}}$

(答) チ. $\frac{3}{2}$　ツ. $\frac{1}{2}$

(5) $\sin 160^\circ = \sin 20^\circ = b$，$\cos 170^\circ = -\cos 10^\circ = -a$であるから

$$\sin 160^\circ + \cos 170^\circ = \boldsymbol{-a+b}$$

$\sin 80^\circ = \cos 10^\circ = a$，$\cos 110^\circ = -\cos 70^\circ = -\sin 20^\circ = -b$であるから

$$\sin 80^\circ + \cos 110^\circ = \boldsymbol{a-b}$$

(答) テ. $-a+b$　ト. $a-b$

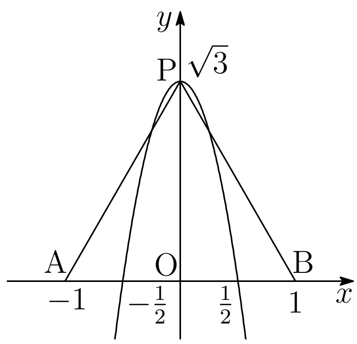
[3] 放物線の方程式は　$y=-4\sqrt{3}x^2+\sqrt{3}$

頂点Pの座標は$(0,\ \sqrt{3})$であるから　$\mathrm{PO}=\boldsymbol{\sqrt{3}}$

$\triangle$PABが正三角形であるから　$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$

このとき，直角三角形PAOと直角三角形PBOは合同で，$\angle\mathrm{PAO}=\angle\mathrm{PBO}=60^\circ$であるから

$$\mathrm{AO}=\mathrm{BO}=1 \quad ゆえに \quad \mathrm{AB}=\boldsymbol{2}$$



$0<a<\frac{1}{2}$であるから，Qはx軸の上側の点であり，Qからx軸に下ろした垂線の長さをhとすると　$h=-\sqrt{3}(4a^2-1)$　$\cdots$①

$\triangle$QCDと$\triangle$PABは合同であるから

$$\mathrm{CD}:h=\mathrm{AB}:\mathrm{PO}=2:\sqrt{3} \quad ゆえに \quad \mathrm{CD}=\frac{2}{\sqrt{3}}h \quad \cdots②$$

①，②より　$\mathrm{CD}=\boldsymbol{2(1-4a^2)}$

$\mathrm{CD}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}$のとき　$2(1-4a^2)=\frac{1}{2}\times 2$

$0<a<\frac{1}{2}$に注意して　$a=\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{4}}$

(答) ナ. $\sqrt{3}$　ニ. 2　ヌ. $2(1-4a^2)$　ネ. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

[4] $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$，$\mathrm{AB}=c$ とおくと

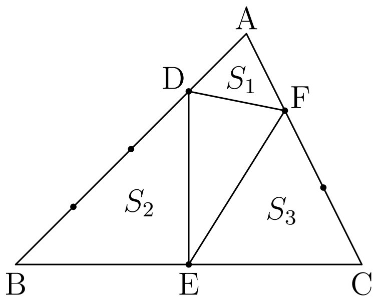
$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C=24$$

であるから

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ADF}&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}c\times\frac{1}{3}b\sin A=\frac{1}{12}\times\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{12}\times 24=\mathbf{2}\\ \triangle\mathrm{BED}&=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}c\times\frac{1}{2}a\sin B=\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{3}{8}\times 24=\mathbf{9}\\ \triangle\mathrm{CFE}&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}a\times\frac{2}{3}b\sin C=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{3}\times 24=\mathbf{8}\end{aligned}$$

したがって，$\triangle\mathrm{DEF}$ の面積は

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{DEF}&=24-(S_1+S_2+S_3)\\ &=24-(2+9+8)=\mathbf{5}\end{aligned}$$



(答) ノ．2　ハ．9　ヒ．8　フ．5