熊本県立技術短期大学校

推薦入学試験問題

数学 I(90 分)

平成 18 年 11 月 26 日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題冊子および答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督員に合図をし、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始 30 分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の 5 分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆又はシャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計 (時計機能だけのもの) 及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能及び翻訳機能を持つ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

平成19年度　熊本県立技術短期大学校推薦入学選抜試験
数学問題 (90分)

[1] (1) 1個240円の菓子Aと1個150円の菓子Bがある。A，Bあわせて15個を3,000円以内で買うとき，Aは最大$\boxed{\text{ア}}$個買える。

(2) x^3+5x^2+8x+4 を因数分解すると，$(\boxed{\text{イ}})\times(\boxed{\text{ウ}})^2$ である。

(3) $z=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，分母を有理化すると，$z=\boxed{\text{エ}}$ で $z+\dfrac{1}{z}=\boxed{\text{オ}}$ である。

(4) 点 $(1,-2)$ を通る放物線 $y=-x^2+ax+b$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に1だけ平行移動したとき，移動後の放物線は，点 $(-1,-2)$ を通る。このとき $a=\boxed{\text{カ}}$，$b=\boxed{\text{キ}}$ である。

(5) $0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ であるとき，$y=\cos^2\theta+\sin\theta$ の最大値は$\boxed{\text{ク}}$，最小値は$\boxed{\text{ケ}}$である。

[2] (1) $\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{a^2+2a+1}$ (ただし，$1<a<2$) の根号をはずし，簡単にすると $\boxed{\text{コ}}a+\boxed{\text{サ}}$ となる。

(2) 2次関数 $y=2x^2+4x-1$ の $-2\leqq x\leqq 0$ における最小値は$\boxed{\text{シ}}$であり，この2次関数の表すグラフを x 軸方向に2だけ平行移動したグラフの表す2次関数の $-2\leqq x\leqq 0$ における最小値は$\boxed{\text{ス}}$である。

(3) 2次関数 $y=(a-2)x^2+2a^2x+b$ の値が正となる範囲が $-1<x<3$ であるならば，$a=\boxed{\text{セ}}$，$b=\boxed{\text{ソ}}$ である。ただし，$a>0$ とする。

(4) $\triangle$ABCにおいて，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}-1$，$\mathrm{BC}=2$，$\mathrm{AC}=\sqrt{6}$ のとき，$\angle \mathrm{A}=\boxed{\text{タ}}^\circ$，$\angle \mathrm{B}=\boxed{\text{チ}}^\circ$ である。

(5) $4\sin^2\theta+6\tan^2\theta=3$ を満たし，$0^\circ<\theta<180^\circ$ の範囲にある θ は，$\theta=\boxed{\text{ツ}}^\circ$，$\boxed{\text{テ}}^\circ$ である。

[3] $P=2x^2+12xy+21y^2+12y+14$ は，$(x,\ y)=\boxed{\text{ト}}$ で，最小値$\boxed{\text{ナ}}$をとる。また，x，y を整数とするとき，$P=5$ を満たす x，y は，$(x,\ y)=\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$ である。

[4] 直径が3の円周上に4点A，B，C，Dが，時計の回る方向にこの順番に並んでいる。$\mathrm{AB}=2$，$\angle\mathrm{DAB}=90^\circ$ であるとき，$\sin\angle\mathrm{ADB}=\boxed{\text{ネ}}$ で，$\triangle$ABDの面積は$\boxed{\text{ノ}}$である。さらに，$\mathrm{CB}=\dfrac{3}{2}$ とすると，$\mathrm{CA}=\boxed{\text{ハ}}$ で $\triangle$ABCの面積は$\boxed{\text{ヒ}}$となる。

解答例

[1] (1) 菓子Aをx個買うとすると，菓子Bは$(15-x)$個買うことになるから

$$240x+150(15-x)\leqq 3000$$

整理すると　　$90x\leqq 750$

よって　　$x\leqq \dfrac{25}{3}$

$\dfrac{25}{3}=8.3\cdots$ で，xは整数であるから　$x\leqq 8$

したがって，**Aは最大8個買える**。

(答) ア．8

(2) $P(x)=x^3+5x^2+8x+4$ とすると

$$P(-1)=(-1)^3+5\cdot(-1)^2+8\cdot(-1)+4=0$$

よって，$P(x)$は$x+1$を因数にもつ．
右の割り算から

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \quad +4x \quad +4 \\ \hline x+1 & x^3 +5x^2 +8x +4 \\ & x^3 \quad +x^2 \\ \hline & \qquad 4x^2 +8x \\ & \qquad 4x^2 +4x \\ \hline & \qquad\qquad 4x +4 \\ & \qquad\qquad 4x +4 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$x^3+5x^2+8x+4=(x+1)(x^2+4x+4)$$

したがって

$$x^3+5x^2+8x+4=\boldsymbol{(x+1)(x+2)^2}$$

(答) イ．$x+1$　ウ．$x+2$

問題点

同校入試課に本問題は因数定理を用いるため，数学IIの問題ではないかと問い合わせたところ，$x^3+5x^2+8x+4=(x+a)(x+b)^2$ のようにxの恒等式と考えて解く問題であるという回答があった．しかし，この解法も数学IIの「式と証明」で扱う内容であると説明したところ，今後問題作成には細心の注意を払うという回答を得た．

(3) $$z=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{3+2\sqrt{3}\sqrt{2}+2}{3-2}=\boldsymbol{5+2\sqrt{6}}$$

$$z+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{(5+2\sqrt{6})+(5-2\sqrt{6})}{3-2}=\boldsymbol{10}$$

(答) エ．$5+2\sqrt{6}$　オ．10

(4) 放物線 $y=-x^2+ax+b$ 上の点 $(p,\ q)$ を x 軸方向に -3，y 軸方向に 1 だけ平行移動した点を $(-1,-2)$ とすると

$$p-3=-1,\ q+1=-2 \quad ゆえに \quad p=2,\ q=-3$$

2 点 $(1,-2)$，$(2,-3)$ は放物線 $y=-x^2+ax+b$ 上の点であるから

$$-2=-1^2+a\cdot 1+b$$
$$-3=-2^2+a\cdot 2+b$$

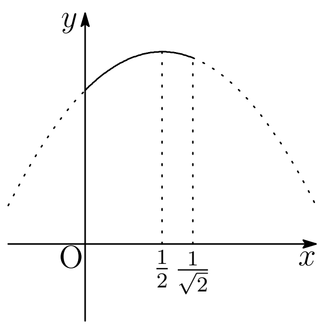
式を整理すると

$$a+b=-1,\ 2a+b=1$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=2,\ b=-3}$

(答) カ. 2　キ. -3

(5) $\cos^2\theta+\sin\theta=(1-\sin^2\theta)+\sin\theta$
$=-\sin^2\theta+\sin\theta+1$



$\sin\theta=x$ とおくと，$0^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ のとき
$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ であり

$$y=-x^2+x+1$$

すなわち　$y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4}$

よって　$x=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\theta=30^\circ$ のとき　**最大値** $\boldsymbol{\dfrac{5}{4}}$
$x=0$　すなわち　$\theta=0^\circ$ のとき　**最小値 1**

(答) ク. $\dfrac{5}{4}$　ケ. 1

[2] (1) $$\begin{aligned}\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{a^2+2a+1}&=\sqrt{(a-2)^2}-\sqrt{(a+1)^2}\\&=|\,a-2\,|-|\,a+1\,|\end{aligned}$$

$1<a<2$ のとき，$a-2<0$，$a+1>0$ であるから

$$|\,a-2\,|=-(a-2)=-a+2$$
$$|\,a+1\,|=a+1$$

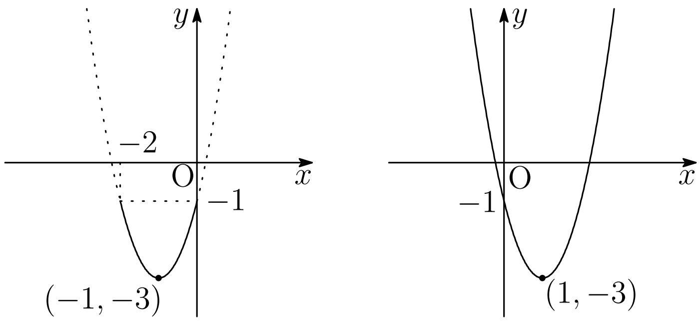
したがって　$|\,a-2\,|-|\,a+1\,|=-a+2-(a+1)=-2a+1$

よって　$\sqrt{a^2-4a+4}-\sqrt{a^2+2a+1}=\boldsymbol{-2a+1}$

(答) コ．-2　サ．1

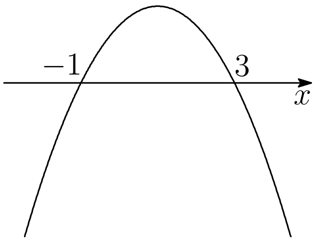
(2) $$\begin{aligned}y&=2x^2+4x-1\\&=2(x+1)^2-3\end{aligned}$$

であるから，2 次関数 $y=2x^2+4x-1$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ は，
$x=-1$ で**最小値 $\boldsymbol{-3}$** をとる (左図).
この 2 次関数のグラフを x 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフ (右図) の表す 2 次関数の $-2\leqq x\leqq 0$ における最小値は，$x=0$ で**最小値 $\boldsymbol{-1}$** をとる.



(答) シ．-3　ス．-1

(3) 条件から，2 次関数 $y=(a-2)x^2+2a^2x+b$ の グラフは，$-1<x<3$ のときだけ x 軸の上側にある．



すなわち，上に凸の放物線で 2 点 $(-1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を通るから

$$a-2<0$$
$$(a-2)\cdot(-1)^2+2a^2\cdot(-1)+b=0$$
$$(a-2)\cdot 3^2+2a^2\cdot 3+b=0$$

$a>0$ であるから，第 1 式より　$0<a<2$　$\cdots$①

第 2 式より　$b=2a^2-a+2$　$\cdots$②

第 3 式より　$b=-6a^2-9a+18$　$\cdots$③

②，③ から　$2a^2-a+2=-6a^2-9a+18$

整理して　$a^2+a-2=0$

すなわち　$(a-1)(a+2)=0$

① より　$\boldsymbol{a=1}$

これを ② に代入して　$\boldsymbol{b=3}$

(答) セ．1　ソ．3

(4) $a=2$，$b=\sqrt{6}$，$c=\sqrt{3}-1$

余弦定理により

$$\cos A=\frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2^2}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{6-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos B=\frac{(\sqrt{3}-1)^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2(\sqrt{3}-1)\cdot 2}=\frac{2-2\sqrt{3}}{4(\sqrt{3}-1)}$$
$$=\frac{-2(\sqrt{3}-1)}{4(\sqrt{3}-1)}=-\frac{1}{2}$$

したがって　$\boldsymbol{\angle \mathrm{A}=45^\circ}$，$\boldsymbol{\angle \mathrm{B}=120^\circ}$

(答) タ．45°　チ．120°

(5) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，与えられた式は

$$4\sin^2\theta + \frac{6\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = 3$$

すなわち　$4\sin^2\theta\cos^2\theta + 6\sin^2\theta = 3\cos^2\theta$

$$4\sin^2\theta(1-\sin^2\theta) + 6\sin^2\theta = 3(1-\sin^2\theta)$$

整理して　$4\sin^4\theta - 13\sin^2\theta + 3 = 0$

よって　$(\sin^2\theta - 3)(4\sin^2\theta - 1) = 0$

$\sin^2\theta - 3 \neq 0$ であるから

$$4\sin^2\theta - 1 = 0$$

さらに，$0° < \theta < 180°$ より $0 < \sin\theta \leqq 1$ であるから

$$\sin\theta = \frac{1}{2}\quad \text{よって}\quad \boldsymbol{\theta = 30°,\ 150°}$$

(答) ツ．テ．$30°$，$150°$

[3]

$$\begin{aligned} P &= 2x^2 + 12xy + 21y^2 + 12y + 14 \\ &= 2(x^2 + 6xy) + 21y^2 + 12y + 14 \\ &= 2\{(x+3y)^2 - (3y)^2\} + 21y^2 + 12y + 14 \\ &= 2(x+3y)^2 + 3y^2 + 12y + 14 \\ &= 2(x+3y)^2 + 3(y^2 + 4y) + 14 \\ &= 2(x+3y)^2 + 3\{(y+2)^2 - 2^2\} + 14 \\ &= 2(x+3y)^2 + 3(y+2)^2 + 2 \end{aligned}$$

P は

$$x + 3y = 0 \text{ かつ } y + 2 = 0$$

すなわち　$\boldsymbol{(x,\ y) = (6, -2)}$ **のとき，最小値 2** をとる．

$P = 5$ のとき　$2(x+3y)^2 + 3(y+2)^2 = 3$　$\cdots$①

整数 x，y について，$2(x+3y)^2$ および $3(y+2)^2$ のとる値は，それぞれ

$$2(x+3y)^2 = 0,\ 2\cdot1,\ 2\cdot4,\ 2\cdot9, \cdots$$
$$3(y+2)^2 = 0,\ 3\cdot1,\ 3\cdot4,\ 3\cdot9, \cdots$$

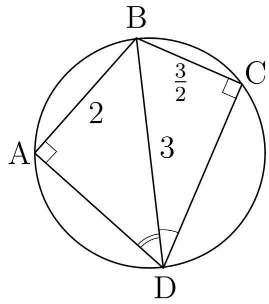
このとき，① を満たすものは　$2(x+3y)^2 = 0$ かつ $3(y+2)^2 = 3\cdot1$

すなわち　$x + 3y = 0$，$y + 2 = \pm1$

よって　$\boldsymbol{(x,\ y) = (3, -1),\ (9, -3)}$

(答) ト．$(6, -2)$　ナ．2　ニ．ヌ．$(3, -1)$，$(9, -3)$

[4] $\angle \mathrm{DAB} = 90^\circ$ であるから　$\mathrm{BD} = 3$ (直径)



したがって　$\sin \angle \mathrm{ADB} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BD}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

また　$\mathrm{AD} = \sqrt{\mathrm{BD}^2 - \mathrm{AB}^2}$

$= \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

ゆえに　$\triangle \mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AD}$

$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{5} = \boldsymbol{\sqrt{5}}$

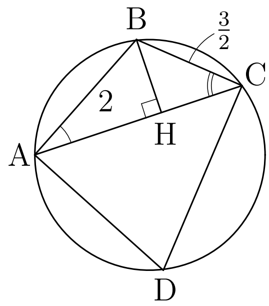
さらに　$\cos \angle \mathrm{BDA} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BD}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

BD は直径であるから，直角三角形 BCD において

$$\sin \angle \mathrm{BDC} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}} = \frac{3}{2} \div 3 = \frac{1}{2}$$

すなわち　$\angle \mathrm{BDC} = 30^\circ$

$\triangle \mathrm{ABC}$ において，B から CA に垂線 BH を引く．



$\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$ に対する円周角により

$\angle \mathrm{BAH} = \angle \mathrm{BDC}$

ゆえに　$\angle \mathrm{BAH} = 30^\circ$

$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ に対する円周角により

$\angle \mathrm{BCH} = \angle \mathrm{BDA}$

ゆえに　$\cos \angle \mathrm{BCH} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

よって　$\mathrm{AH} = \mathrm{AB}\cos \angle \mathrm{BAH} = 2\cos 30^\circ = 2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

$\mathrm{CH} = \mathrm{BC}\cos \angle \mathrm{BCH} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

したがって　$\mathrm{CA} = \mathrm{AH} + \mathrm{CH} = \boldsymbol{\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}}$

また　$\mathrm{BH} = \mathrm{AB}\sin \angle \mathrm{BAH} = 2\sin 30^\circ = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$

よって　$\triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CA}\cdot\mathrm{BH} = \dfrac{1}{2} \times \left(\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\right) \times 1 = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{4}}$

(答) ネ．$\dfrac{2}{3}$　ノ．$\sqrt{5}$　ハ．$\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$　ヒ．$\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{4}$