熊本県立技術短期大学校

推薦入学試験問題

数学I(90分)

平成17年9月18日

【解答上の注意】

1. 「解答始め」の合図があるまでは問題冊子および答案用紙を開かないこと。
2. 「解答始め」の合図があったら、まず問題・答案用紙の過不足を確かめること。
3. 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
4. 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を挙げて試験監督者に合図し、指示を受けること。
5. 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
6. 試験開始30分を経過しないと退出できない。
7. 試験終了前の5分間は退出できない。
8. 受験中机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆又はシャープペンシル、ナイフ又は鉛筆削り、消しゴム、定規、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
9. 計算機能及び翻訳機能を持つ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。
10. 携帯電話等の電源を必ず切っておくこと。

平成18年度　熊本県立技術短期大学校推薦入学選抜試験
数学問題 (90分)

[1] (1) $x = \dfrac{4+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ の分母を有理化すると $x = \boxed{\text{ア}}$ となる。このとき, x^2+2x+1 の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) $2x^2 - xy - y^2 + 3x + 1 = 0$ を満たす y を x で表すと $y = \boxed{\text{ウ}}$, $\boxed{\text{エ}}$ である。

(3) 関数 $y = -3x^2 + 6x + a$ の $0 \leqq x \leqq 3$ における最大値が 7 であるとする。このとき, $a = \boxed{\text{オ}}$ であり, $0 \leqq x \leqq 3$ における y の最小値は $\boxed{\text{カ}}$ となる。

(4) 関数 $y = |2x-1|$ の定義域が $-1 \leqq x \leqq 2$ であるならば値域は $\boxed{\text{キ}} \leqq y \leqq \boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ で, $\tan\theta = 2$ のとき, $\sin\theta = \boxed{\text{ケ}}$, $\cos\theta = \boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) すべての x に対して, $-2x^2 + (a+3)x + \dfrac{a}{2} < 0$ であるならば, $\boxed{\text{サ}} < a < \boxed{\text{シ}}$ である。

(2) 2次関数 $y = x^2$ の表すグラフを x 軸方向に $\boxed{\text{ス}}$, y 軸方向に $\boxed{\text{セ}}$ だけ平行移動した曲線の式は, $y = x^2 + 4x - 2$ となる。

(3) 3点 $(1,\ 1)$, $\left(\dfrac{1}{2}, -2\right)$, $(-2,\ 3)$ を通る2次関数は, $y = \boxed{\text{ソ}}x^2 + \boxed{\text{タ}}x + \boxed{\text{チ}}$ である。

(4) $0^\circ < \theta < 180^\circ$ で, $2\sin^2\theta - 3\sqrt{3}\cos(90^\circ - \theta) + 3 = 0$ が成り立つとき, $\theta = \boxed{\text{ツ}}^\circ$ または $\theta = \boxed{\text{テ}}^\circ$ である。

(5) $\triangle$ABC において, AB $= 10$, BC $= 5$, $\angle$B $= 60^\circ$ のとき, AC $= \boxed{\text{ト}}$, $\angle$A $= \boxed{\text{ナ}}^\circ$ である。

[3] 不等式 $|x+1| \geqq 2|x|$ を満たす x の値の範囲は $\boxed{\text{ニ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ヌ}}$ である。この範囲の x に対して, $y = 3x^2 + 4x - 1$ の最小値は $\boxed{\text{ネ}}$, 最大値は $\boxed{\text{ノ}}$ である。

[4] 2 点 A(a, 0), B(b, 0) を通る放物線 C : $y = 2(x-a)(x-b)$ を考える。ただし, $a < b$ とする。A, B の中点を M とし, 2 点 A, M を通る放物線の頂点 P が C 上にあるとするとき, P の座標を a, b を用いて表すと, ($\boxed{\text{ハ}}$, $\boxed{\text{ヒ}}$) となる。2 点 M, B を通り, C 上に頂点をもつ放物線の頂点 Q は, P を x 軸方向に $\boxed{\text{フ}}$ だけ平行移動した点であるから, Q の座標は a, b を用いて, ($\boxed{\text{ヘ}}$, $\boxed{\text{ホ}}$) と書ける。さらに, $\angle\mathrm{PMQ} = 90^\circ$ とすると, $b - a = \boxed{\text{マ}}$ となる。

[5] 円に内接する四角形 ABCD において, AB = 4, BC = 4, CD = 1, DA = 5 のとき, $\angle\mathrm{A} = \boxed{\text{ミ}}^\circ$, $\angle\mathrm{C} = \boxed{\text{ム}}^\circ$, BD = $\boxed{\text{メ}}$ である。また, この四角形の面積は $\boxed{\text{モ}}$ である。

解答例

[1] (1) $$x=\frac{4+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{(4+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}$$
$$=\frac{4\times 2+4\times(-\sqrt{2})+\sqrt{2}\times 2+\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2}$$
$$=\frac{8-4\sqrt{2}+2\sqrt{2}-2}{4-2}=\frac{6-2\sqrt{2}}{2}=\mathbf{3-\sqrt{2}}$$

また

$$\begin{aligned}x^2+2x+1&=(x+1)^2=\{(3-\sqrt{2})+1\}^2\\&=(4-\sqrt{2})^2\\&=4^2-2\cdot 4\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2\\&=\mathbf{18-8\sqrt{2}}\end{aligned}$$

(答) ア. $3-\sqrt{2}$　イ. $18-8\sqrt{2}$

(2) 左辺を因数分解すると (x について整理)

$$\begin{aligned}&2x^2-xy-y^2+3x+1\\=&2x^2+(-y+3)x-(y^2-1)\\=&2x^2+(-y+3)x-(y+1)(y-1)\\=&\{x-(y-1)\}\{2x+(y+1)\}\\=&(x-y+1)(2x+y+1)\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc}1 & -(y-1) & \longrightarrow & -2y+2\\ 2 & y+1 & \longrightarrow & y+1\\ \hline 2 & -(y+1)(y-1) & & -y+3\end{array}$$

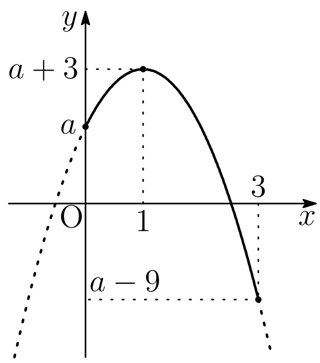
したがって, $(x-y+1)(2x+y+1)=0$ から

$$x-y+1=0 \quad \text{または} \quad 2x+y+1=0$$

これを y について解いて　$\boldsymbol{y=x+1,\,-2x-1}$

(答) ウ. エ. $x+1,\ -2x-1$

(3) $$\begin{aligned}-3x^2+6x+a &= -3(x^2-2x)+a \\ &= -3\{(x-1)^2-1^2\}+a \\ &= -3(x-1)^2+a+3\end{aligned}$$



よって　　$y=-3(x-1)^2+a+3$

$0 \leqq x \leqq 3$ でのグラフは右の図の実線部分である．よって, y は

$x=1$ で最大値 $a+3$ をとり,

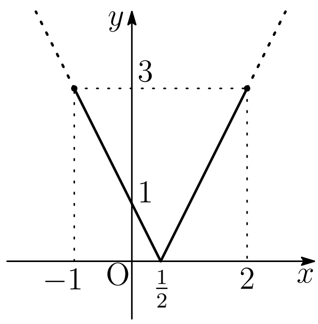
$x=3$ で最小値 $a-9$ をとる.

したがって　$a+3=7$　を解いて　$\boldsymbol{a=4}$

このとき, 最小値は　$4-9=\boldsymbol{-5}$

(答) オ．4　カ．-5

(4) $|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & (x \geqq \frac{1}{2}) \\ -(2x-1) & (x < \frac{1}{2}) \end{cases}$ であるから



$-1 \leqq x \leqq 2$ での $y=|2x-1|$ のグラフは右の図の実線部分である．よって, 値域は

$$\boldsymbol{0 \leqq y \leqq 3}$$

(答) キ．0　ク．3

(5) $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ から

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+2^2} = \frac{1}{5}$$

$0° < \theta < 90°$ より $\cos\theta > 0$ である.

よって　$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{1}{5}} = \boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{5}}}$

また　　$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = 2 \times \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\dfrac{2}{\sqrt{5}}}$

(答) ケ．$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$　コ．$\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

[2] (1) $-2x^2+(a+3)x+\dfrac{a}{2}$ の x^2 の係数は負であり, すべての x に対して,

$-2x^2+(a+3)x+\dfrac{a}{2}<0$ であるためには, $D<0$ を満たせばよいから

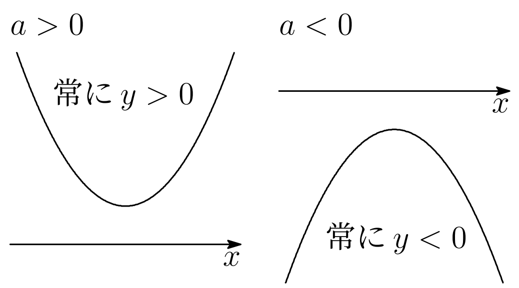
$$\begin{aligned}(a+3)^2-4\cdot(-2)\cdot\frac{a}{2}&<0\\ a^2+10a+9&<0\\ (a+1)(a+9)&<0\\ \boldsymbol{-9<a<-1}&\end{aligned}$$

(答) サ. -9　シ. -1

研究

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ は, $D<0$ のとき x 軸との共有点は存在しないことから, y の値は定符号となる. このとき a の符号により

$$\begin{aligned}a>0,\ D<0 &\iff \text{常に } y>0\\ a<0,\ D<0 &\iff \text{常に } y<0\end{aligned}$$



2 次式の定符号

$$\begin{aligned}\text{常に } ax^2+bx+c>0 &\iff a>0,\ D<0\\ \text{常に } ax^2+bx+c<0 &\iff a<0,\ D<0\end{aligned}$$

[補足] 常に $ax^2+bx+c \geqq 0 \iff a>0,\ D\leqq 0$

常に $ax^2+bx+c \leqq 0 \iff a<0,\ D\leqq 0$

(2)
$$\begin{aligned} x^2+4x-2 &= (x+2)^2-2^2-2 \\ &= (x+2)^2-6 \end{aligned}$$

よって, $y=x^2$ の頂点は $(0,0)$, $y=x^2+4x-2$ の頂点は $(-2,-6)$ であるから, $y=x^2$ を $\boldsymbol{x}$ **軸方向に** $\boldsymbol{-2}$, $\boldsymbol{y}$ **軸方向に** $\boldsymbol{-6}$ だけ平行移動したものが $y=x^2+4x-2$ である.

(答) ス. -2　セ. -6

(3) 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする.

グラフが 3 点 $(1,1)$, $\left(\dfrac{1}{2},-2\right)$, $(-2,3)$ を通るから

$$\begin{aligned} 1 &= a+b+c & \cdots ① \\ -2 &= \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c & \cdots ② \\ 3 &= 4a-2b+c & \cdots ③ \end{aligned}$$

③ − ① から　$3a-3b=2$　$\cdots$ ④

① − ② から　$\dfrac{3}{4}a+\dfrac{1}{2}b=3$　すなわち　$3a+2b=12$　$\cdots$ ⑤

④, ⑤ を解くと　$a=\dfrac{8}{3},\ b=2$

これらを ① に代入して　$c=-\dfrac{11}{3}$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=\dfrac{8}{3}x^2+2x-\dfrac{11}{3}}$

(答) ソ. $\dfrac{8}{3}$　タ. 2　チ. $-\dfrac{11}{3}$

(4) 方程式を変形すると　$2\sin^2\theta - 3\sqrt{3}\sin\theta + 3 = 0$

因数分解すると　$(\sin\theta - \sqrt{3})(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ より　$0 < \sin\theta < 1$ であるから　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

この範囲で $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解くと　$\boldsymbol{\theta = 60^\circ,\ 120^\circ}$

(答) ツ. テ. 60, 120

[別解] $2\sin^2\theta - 3\sqrt{3}\sin\theta + 3 = 0$ を解の公式に適用すると

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{-(-3\sqrt{3}) \pm \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 - 4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}\\ &= \frac{3\sqrt{3} \pm \sqrt{3}}{4} = \frac{4\sqrt{3}}{4},\ \frac{2\sqrt{3}}{4}\\ &= \sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$0 < \sin\theta < 1$ に注意して　$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5) 余弦定理により

$$\begin{aligned}\mathrm{AC}^2 &= 10^2 + 5^2 - 2\cdot 10\cdot 5\cos 60^\circ\\ &= 100 + 25 - 2\cdot 10\cdot 5\cdot\frac{1}{2}\\ &= 75\end{aligned}$$

$\mathrm{AC} > 0$ であるから　$\mathrm{AC} = \sqrt{75} = \boldsymbol{5\sqrt{3}}$

正弦定理により　$\dfrac{5}{\sin A} = \dfrac{5\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$

よって　$\sin A = \dfrac{5}{5\sqrt{3}}\sin 60^\circ = \dfrac{5}{5\sqrt{3}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1}{2}$

$A + C = 120^\circ$ より　$A < 120^\circ$ であるから　$\boldsymbol{A = 30^\circ}$

(答) ト. $5\sqrt{3}$　ナ. 30

[3] $|x+1| = \begin{cases} x+1 & (x \geqq -1) \\ -x-1 & (x < -1) \end{cases}$, $|x| = \begin{cases} x & (x \geqq 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ であるから

$\underline{x < -1 \text{ のとき}}$

$-x-1 \geqq 2(-x)$ を解いて $x \geqq 1$

このとき $x \geqq 1$ は不適.

$\underline{-1 \leqq x < 0 \text{ のとき}}$

$x+1 \geqq 2(-x)$ を解いて $x \geqq -\dfrac{1}{3}$

このときの x の値の範囲は $-\dfrac{1}{3} \leqq x < 0$ $\cdots$①

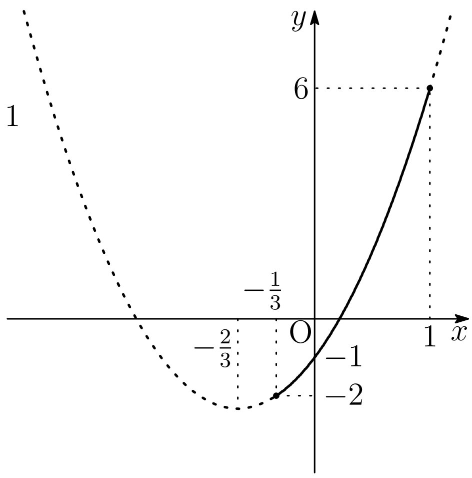
$\underline{x \geqq 0 \text{ のとき}}$

$x+1 \geqq 2x$ を解いて $x \leqq 1$

このときの x の値の範囲は $0 \leqq x \leqq 1$ $\cdots$②

①, ② より，求める x の値の範囲は $\boldsymbol{-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 1}$

$$\begin{aligned} 3x^2+4x-1 &= 3\left(x^2+\frac{4}{3}x\right)-1 \\ &= 3\left\{\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\}-1 \\ &= 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2-1 \\ &= 3\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{7}{3} \end{aligned}$$



よって $y = 3\left(x+\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{7}{3}$

$-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 1$ でのグラフは右の図の実線部分である. よって, y は

$x = -\dfrac{1}{3}$ で**最小値 -2** をとり,

$x = 1$ で**最大値 6** をとる.

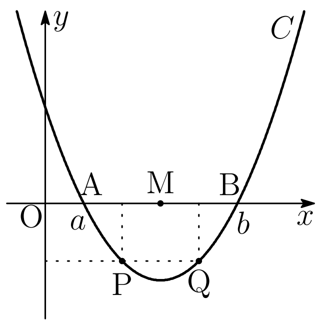
(答) ニ. $-\frac{1}{3}$　ヌ. 1　ネ. -2　ノ. 6

[4] M は A, B の中点であるから, M の x 座標は

$$x=\frac{a+b}{2}$$

2 点 A, M を通る放物線の軸は, A, M の中点を通るから P の x 座標は

$$x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a+b}{2}\right)=\boldsymbol{\frac{3a+b}{4}}$$



であり, P の y 座標は

$$\begin{aligned} y&=2\left(\frac{3a+b}{4}-a\right)\left(\frac{3a+b}{4}-b\right)\\ &=2\times\frac{b-a}{4}\times\frac{3a-3b}{4}=\boldsymbol{-\frac{3}{8}(b-a)^2} \end{aligned}$$

P と Q は放物線 C の軸 $x=\dfrac{a+b}{2}$ に関して対称であり, $\mathrm{PQ}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{AB}$ であるから, Q は P を x 軸方向に $\boldsymbol{\dfrac{b-a}{2}}$ だけ平行移動したものである.

したがって, Q の座標は

$$\left(\frac{3a+b}{4}+\frac{b-a}{2},\ -\frac{3}{8}(b-a)^2\right)\quad すなわち\quad \boldsymbol{\left(\frac{a+3b}{4},\ -\frac{3}{8}(b-a)^2\right)}$$

$\angle\mathrm{PMQ}=90^\circ$ のとき, A, M の中点を R とするとき, △RPM は直角二等辺三角形であるから PR = RM より

$$\frac{3}{8}(b-a)^2=\frac{b-a}{4}$$

$b-a\neq 0$ であるから　$\boldsymbol{b-a=\dfrac{2}{3}}$

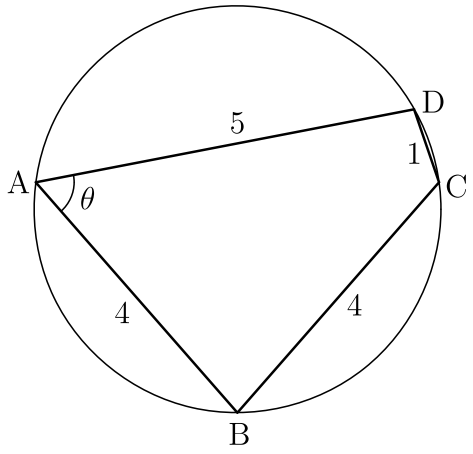
(答)　ハ. $\dfrac{3a+b}{4}$　ヒ. $-\dfrac{3}{8}(b-a)^2$　フ. $\dfrac{b-a}{2}$

　　　ヘ. $\dfrac{a+3b}{4}$　ホ. $-\dfrac{3}{8}(b-a)^2$　マ. $\dfrac{2}{3}$

[5] $\angle \mathrm{A} = \theta$ とする.

$\triangle$ABD において, 余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} \mathrm{BD}^2 &= 5^2 + 4^2 - 2\cdot 5\cdot 4\cos\theta \\ &= 41 - 40\cos\theta \end{aligned}$$



四角形 ABCD は円に内接するから

$$\angle \mathrm{C} = 180^\circ - \theta$$

$\triangle$BCD において, 余弦定理を用いると

$$\begin{aligned} \mathrm{BD}^2 &= 4^2 + 1^2 - 2\cdot 4\cdot 1\cos(180^\circ - \theta) \\ &= 17 - 8(-\cos\theta) \\ &= 17 + 8\cos\theta \end{aligned}$$

よって　　$41 - 40\cos\theta = 17 + 8\cos\theta$　　これを解いて　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

また　　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ を満たす θ は　$\theta = 60^\circ$

したがって　　$\angle \mathrm{A} = \mathbf{60^\circ}$,　$\angle \mathrm{C} = 180^\circ - 60^\circ = \mathbf{120^\circ}$

このとき　　$\mathrm{BD}^2 = 21$ となるから　$\mathbf{BD = \sqrt{21}}$

四角形 ABCD の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{BCD} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 5\cdot 4\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1\sin 120^\circ \\ &= 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 5\sqrt{3} + \sqrt{3} = \mathbf{6\sqrt{3}} \end{aligned}$$

(答) ミ. 60　ム. 120　メ. $\sqrt{21}$　モ. $6\sqrt{3}$