熊本県立技術短期大学校

一般入学試験問題

数学I・II(90分)

平成24年2月5日

【受験上の注意】

1 「解答始め」の合図があるまでは、問題用紙・答案用紙を開かないこと。

2 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・解答用紙の枚数の過不足を確かめること。

3 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。

4 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を上げて試験監督者に合図し、指示を受けること。

5 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。

6 受験中に机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計 (時計機能だけのもの) 及び眼鏡のみとする。

7 計算機能及び翻訳機能をもつ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。

平成24年度　熊本県立技術短期大学校一般入学選抜試験
数学問題(90分)

[1] (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3$ を $(x-1)^2$ で割った余りが2ならば $a =$ $\boxed{\text{ア}}$, $b =$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 方程式 $x^2+y^2+2x-6y+8=0$ は，中心が $\boxed{\text{ウ}}$，半径が $\boxed{\text{エ}}$ の円を表す。

(3) $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin\theta = \dfrac{1}{4}$ のとき，$\sin 2\theta =$ $\boxed{\text{オ}}$，$\cos 2\theta =$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 方程式 $2^{x-1} - 3(\sqrt{2})^{x-2} - 2 = 0$ は $y = (\sqrt{2})^x$ とおいて y の方程式になおすと $\boxed{\text{キ}}$ $= 0$ となる。従って解は $x =$ $\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) 関数 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 30$ の極小値は $\boxed{\text{ケ}}$，極大値は $\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) a を実数とする。方程式 $x^3 - 2(a+1)x^2 + 5ax - 2a = 0$ の実数解が $x = 2$ だけであるとき，a の値の範囲は $\boxed{\text{サ}}$ $< a <$ $\boxed{\text{シ}}$ である。

(2) 2点 $\mathrm{A}(2, -1)$，$\mathrm{B}(3,\ 2)$ を通る直線の方程式は $y =$ $\boxed{\text{ス}}$ である。$\mathrm{C}(-2,\ 3)$ とすると，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積は $\boxed{\text{セ}}$ である。

(3) $\triangle\mathrm{ABC}$ において $\angle\mathrm{C} = 2\angle\mathrm{B}$ で $\mathrm{AB} : \mathrm{AC} = \sqrt{3} : 1$ であるなら，$\angle\mathrm{B} =$ $\boxed{\text{ソ}}$ $^\circ$ で BC は AC の $\boxed{\text{タ}}$ 倍である。

(4) 関数 $y = \left(\log_3 \dfrac{x}{9}\right)\left(\log_3 \dfrac{x}{3}\right)$ の $3 \leqq x \leqq 9$ における最大値は $\boxed{\text{チ}}$，最小値は $\boxed{\text{ツ}}$ である。

(5) 放物線 $C_1 : y = x^2 - 4x + 5$ と直線 $y = 2$ で囲まれる部分の面積 S_1 は $\boxed{\text{テ}}$ である。それらの2交点を通る放物線 $C_2 : y = ax^2 - 4ax + 3a + 2$ $(a > 1)$ と C_1 で囲まれる部分の面積が，S_1 の $\dfrac{1}{2}$ 倍ならば，$a =$ $\boxed{\text{ト}}$ である。

[3] 点 $(1,\ 1)$ から，放物線 $C : y = 3x^2 - x + 2$ に引いた接線の接点を P，Q とすると，P，Q の座標は $\boxed{\text{ナ}}$，$\boxed{\text{ニ}}$ である。このとき，2点 P，Q を通る直線は $y =$ $\boxed{\text{ヌ}}$ であり，この直線と放物線 C で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

[4] 直線 $\ell_1 : y = \dfrac{3}{4}x$ と x 軸の両方に接する半径1の円を C_1 とし，C_1 の中心 A の x 座標を a $(a > 0)$，ℓ_1 と C_1 の接点を P とする。$\angle\mathrm{POA} = \theta$ とおくと，$\tan\theta$ は a を用いて $\tan\theta =$ $\boxed{\text{ノ}}$ と書ける。これを用いると，a の値は $\boxed{\text{ハ}}$ となる。次に，点 P で ℓ_1 に接する円 C_2 の中心 B が x 軸上にあるとすると，円 C_2 の半径 PB は $\boxed{\text{ヒ}}$ で B の x 座標は $\boxed{\text{フ}}$ である。

解答例

[1] (1) $f(x)$ を $(x-1)^2$ で割った商を，x の 1 次式 $Q(x)$ とおくと

$$x^3+ax^2+bx-3=(x-1)^2Q(x)+2$$

ゆえに $\quad x^3+ax^2+bx-5=(x^2-2x+1)Q(x)$

x^3 の係数と定数項を比較して，$Q(x)=x-5$ となるから

$$\begin{aligned}(x^2-2x+1)Q(x)&=(x^2-2x+1)(x-5)\\&=x^3-7x^2+11x-5\end{aligned}$$

よって $\quad \boldsymbol{a=-7,\ b=11}$

(答) ア．-7　イ．11

(2) 方程式 $x^2+y^2+2x-6y+8=0$ を変形すると

$$(x^2+2x+1)+(y^2-6y+9)=-8+1+9$$

ゆえに $\quad (x+1)^2+(y-3)^2=2$

よって，中心 $\boldsymbol{(-1,\ 3)}$，半径 $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ の円を表す.

(答) ウ．$(-1,\ 3)$　エ．$\sqrt{2}$

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta>0$ であるから

$$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

したがって

$$\begin{aligned}\sin 2\theta&=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{15}}{8}}\\ \cos 2\theta&=1-2\sin^2\theta=1-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\boldsymbol{\frac{7}{8}}\end{aligned}$$

(答) オ．$\dfrac{\sqrt{15}}{8}$　エ．$\dfrac{7}{8}$

(4) 与えられた方程式の両辺に 2 をかけると

$$2^x - 3(\sqrt{2})^x - 4 = 0$$

$y = (\sqrt{2})^x \cdots$ ① とおくと

$$\boldsymbol{y^2 - 3y - 4} = 0 \quad \text{ゆえに} \quad (y+1)(y-4) = 0$$

① より，$y > 0$ であるから　$y = 4$

したがって　$(\sqrt{2})^x = 4$　これを解いて　$\boldsymbol{x = 4}$

(答) キ．$y^2 - 3y - 4$　ク．4

(5) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$
$f'(x) = 0$ とすると　$x = -4,\ 2$
したがって，$f(x)$ の増減表は次のようになる．

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 110	$\searrow$	極小 2	$\nearrow$

よって，**$x = -4$ のとき極大値 110，$x = 2$ のとき極小値 2** をとる．

(答) ケ．2　コ．110

[2] (1) $P(x) = x^3 - 2(a+1)x^2 + 5ax - 2a$ とおくと　$P(2) = 0$
$P(x)$ は $x - 2$ を因数にもつので

$$P(x) = (x-2)(x^2 - 2ax + a)$$

$P(x) = 0$ の実数解が $x = 2$ だけであるのは，次の i)，ii) の場合である．

i) $x^2 - 2ax + a = 0$ が重解 $x = 2$ をもつとき

$$-\frac{-2a}{2\cdot 1} = 2 \quad \text{かつ} \quad (-a)^2 - 1\cdot a = 0$$

このとき，これを満たす a はない．

ii) $x^2 - 2ax + a = 0$ が虚数解をもつとき

$$(-a)^2 - 1\cdot a < 0 \quad \text{ゆえに} \quad a(a-1) < 0$$

よって　　$\boldsymbol{0 < a < 1}$

(答) サ．0　シ．1

(2) 2 点 A$(2, -1)$，B$(3,\ 2)$ を通る直線の方程式は

$$y-(-1)=\frac{2-(-1)}{3-2}(x-2) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=3x-7}$$

AB 間の距離は　$\mathrm{AB}=\sqrt{(3-2)^2+\{2-(-1)\}^2}=\sqrt{10}$
点 C$(-2,\ 3)$ から直線 $3x-y-7=0$ までの距離 d は

$$d=\frac{|3\cdot(-2)-3-7|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{16}{\sqrt{10}}$$

したがって，$\triangle$ABC の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot d=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times\frac{16}{\sqrt{10}}=\mathbf{8}$$

(答) ス．$3x-7$　セ．8

(3) 正弦定理により　$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\sin C:\sin B$

ゆえに　　$\sin C:\sin B=\sqrt{3}:1$
すなわち　　$\sin C=\sqrt{3}\sin B$

$C=2B$ により

$$\sin 2B=\sqrt{3}\sin B \quad \text{ゆえに} \quad 2\sin B\cos B=\sqrt{3}\sin B$$

$\sin B\neq 0$ であるから　　$\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
よって　$\boldsymbol{B=30^\circ}$，$C=60^\circ$
$A=180^\circ-(B+C)=180^\circ-(30^\circ+60^\circ)=90^\circ$
正弦定理により，$\mathrm{BC}:\mathrm{AC}=\sin A:\sin B$ であるから

$$\mathrm{BC}:\mathrm{AC}=\sin 90^\circ:\sin 30^\circ=2:1$$

よって，BC は AC の **2 倍**

(答) ソ．30　タ．2

(4) $t=\log_3 x$ とおくと，$3 \leqq x \leqq 9$ より　$1 \leqq t \leqq 2$

$$\left(\log_3 \frac{x}{9}\right)\left(\log_3 \frac{x}{3}\right)=(\log_3 x-2)(\log_3 x-1)$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= (t-2)(t-1) \quad (1 \leqq t \leqq 2) \\ &= t^2-3t+2=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \end{aligned}$$

ゆえに　　$-\frac{1}{4} \leqq y \leqq 0$

よって，求める関数の最大値は $\mathbf{0}$，最小値は $\boldsymbol{-\frac{1}{4}}$

(答) チ. 0　ツ. $-\frac{1}{4}$

(5) 放物線 $C_1 : y=x^2-4x+5$ と直線 $y=2$ の共有点の x 座標は

$x^2-4x+5=2$　これを解いて　$x=1,\ 3$

よって，求める図形の面積 S_1 は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_1^2 \{2-(x^2-4x+5)\}\,dx \\ &= -\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx = -\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3 = \mathbf{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

$C_1 : y=x^2-4x+5$ と $C_2 : y=ax^2-4ax+3a+2$ $(a>1)$ で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_1^3 \{(x^2-4x+5)-(ax^2-4ax+3a+2)\}dx \\ &= -(a-1)\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx \\ &= -(a-1)\times\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3=\frac{4}{3}(a-1) \end{aligned}$$

$S_2=\frac{1}{2}S_1=\frac{2}{3}$ であるから，上式により　　$\boldsymbol{a=\frac{3}{2}}$

(答) テ. $\frac{4}{3}$　ト. $\frac{3}{2}$

[3] $y = 3x^2 - x + 2$ を微分すると　$y' = 6x - 1$

接点の座標を $(a,\ 3a^2 - a + 2)$ とすると，この点における接線の傾きは $6a - 1$ であるから，接線の方程式は

$$y - (3a^2 - a + 2) = (6a - 1)(x - a) \quad \text{ゆえに} \quad y = (6a - 1)x - 3a^2 + 2$$

これが点 $(1,\ 1)$ を通るから

$$1 = (6a - 1)\cdot 1 - 3a^2 + 2 \quad \text{これを解いて} \quad a = 0,\ 2$$

ゆえに，接点の座標は　　$\boldsymbol{(0,\ 2),\ (2,\ 12)}$

この 2 点を通る直線の方程式は

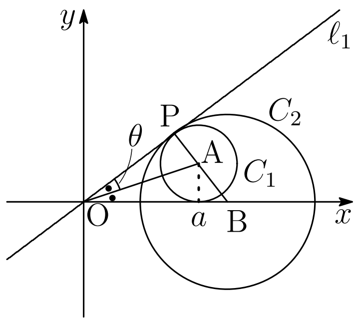
$$y - 2 = \frac{12 - 2}{2 - 0}(x - 0) \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{y = 5x + 2}$$

この直線と放物線 $C : y = 3x^2 - x + 4$ で囲まれた部分の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{(5x + 2) - (3x^2 - x + 2)\}dx \\ &= -3\int_0^2 x(x - 2)dx = -3\left(-\frac{1}{6}\right)(2 - 0)^3 = \mathbf{4} \end{aligned}$$

(答) ナ．ニ．$(0,\ 2)$，$(2,\ 12)$　ヌ．$5x + 2$　ネ．4

[4] $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ であるから，A の y 座標は $a\tan\theta$,
円 C_1 の半径が 1 であるから



$$a\tan\theta=1 \quad よって \quad \boldsymbol{\tan\theta=\frac{1}{a}}$$

$\tan 2\theta=\dfrac{3}{4}$ であるから

$$\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{3}{4}$$

ゆえに　$(\tan\theta+3)(3\tan\theta-1)=0$

$\tan\theta>0$ であるから　$\tan\theta=\dfrac{1}{3}$

したがって　$\boldsymbol{a=3}$

$\mathrm{OP}=a$ であるから

$$\mathrm{PB}=\mathrm{OP}\tan 2\theta=3\times\frac{3}{4}=\boldsymbol{\frac{9}{4}}$$

また，B の x 座標は

$$\sqrt{\mathrm{OP}^2+\mathrm{PB}^2}=\sqrt{3^2+\left(\frac{9}{4}\right)^2}=\boldsymbol{\frac{15}{4}}$$

(答) ノ. $\dfrac{1}{a}$　ハ. 3　ヒ. $\dfrac{9}{4}$　フ. $\dfrac{15}{4}$