熊本県立技術短期大学校

一般入学試験問題

数学I・II(90分)

平成23年2月6日

【受験上の注意】

1 「解答始め」の合図があるまでは、問題用紙・答案用紙を開かないこと。

2 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・解答用紙の枚数の過不足を確かめること。

3 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。

4 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を上げて試験監督者に合図し、指示を受けること。

5 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。

6 受験中に机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計 (時計機能だけのもの) 及び眼鏡のみとする。

7 計算機能及び翻訳機能をもつ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。

8 携帯電話等の電源は切っておくこと。

平成23年度　熊本県立技術短期大学校一般入学選抜試験
数学問題 (90分)

[1] (1) $f(x) = x^3 + (a+1)x^2 + (2a+b)x + 1$ が $x+1$ で割り切れ，$x-2$ で割った余りが3であれば $a = \boxed{ア}$，$b = \boxed{イ}$ である。

(2) 方程式 $x^2 + 2(a-1)x + y^2 - 2(2a-3)y + 6a^2 - 15a + 8 = 0$ が円を表すとき，a の値の範囲は $\boxed{ウ} < a < \boxed{エ}$ である。

(3) $0 \leqq x < \pi$ のとき，$\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をみたす x の値は $x = \boxed{オ}$，$\boxed{カ}$ である。

(4) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < 4\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^x < \dfrac{1}{\sqrt{2}}2^x$ をみたす x の値の範囲は $\boxed{キ} < x < \boxed{ク}$ である。

(5) $F(x) = \displaystyle\int_0^x (t^2 - 3t + 2)dt$ とおくとき，$F(x)$ の値は $\boxed{ケ} < x < \boxed{コ}$ の範囲で減少する。

[2] (1) $x = 2 - \sqrt{3}i$ の共役な複素数を y とするとき，$x^2 + y^2 = \boxed{サ}$，$x^3 + y^3 = \boxed{シ}$ である。

(2) 条件 $y \geqq x$，$y \leqq 2x$，$y \leqq -2x + 4$ の下で $x + y$ は，$(x,\ y) = \boxed{ス}$ のとき最大値 $\boxed{セ}$ をとる。

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲における $2\sqrt{3}\cos 2x + 4\sin x\cos x$ の最大値は $\boxed{ソ}$，最小値は $\boxed{タ}$ である。

(4) $\log_3(x-3) < 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x-5)$ をみたす x の値の範囲は $\boxed{チ} < x < \boxed{ツ}$ である。

(5) 関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4a$ が，$x = 1$ で極値10をとるとき，$a = \boxed{テ}$，$b = \boxed{ト}$ である。

[3] 放物線 $C : y = -2x^2 + \dfrac{1}{3}$ の頂点Pを通り，x 軸の正方向とのなす角が $\theta(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ の直線 ℓ_1 と x 軸の交点をQとすると，Qの座標は $m = \tan\theta$ を用いると，$(\boxed{ナ},\ 0)$ である。Qを通り，x 軸の正方向とのなす角が 2θ である直線を ℓ_2 とすると，ℓ_2 の方程式は m を用いると $y = \boxed{ニ}$ である。特に，ℓ_2 が C に接するならば $m = \boxed{ヌ}$ で，接点の x 座標は $\boxed{ネ}$ である。

[4] 放物線 $y = x^2 - 2x - 2$ を C_1，放物線 $y = 2x^2$ を C_2 とする。C_2 上の点 $\mathrm{P}(a,\ 2a^2)$ における接線 ℓ は $y = \boxed{\text{ノ}}$ である。C_1 と ℓ との交点の x 座標を $\alpha,\ \beta(\alpha < \beta)$ とすると，$\beta - \alpha = \boxed{\text{ハ}}$ である。C_1 と ℓ で囲まれた部分の面積 S を a を用いて表すと，$S = \boxed{\text{ヒ}}$ である。点Pが C_2 上を動くとき，S は $a = \boxed{\text{フ}}$ で最小値 $\boxed{\text{ヘ}}$ をとる。

解答例

[1] (1) $f(x)$ は $x+1$ で割り切れ，$x-2$ で割った余りが 3 であるから

$$f(-1) = 0, \quad f(2) = 3$$

ゆえに　$(-1)^3 + (a+1)\cdot(-1)^2 + (2a+b)\cdot(-1) + 1 = 0$

$2^3 + (a+1)\cdot 2^2 + (2a+b)\cdot 2 + 1 = 3$

整理すると　$a + b = 1$，$4a + b = -5$

これを解いて　$\boldsymbol{a = -2}$，$\boldsymbol{b = 3}$

(答) ア．-2　イ．3

(2) 方程式 $x^2 + 2(a-1)x + y^2 - 2(2a-3)y + 6a^2 - 15a + 8 = 0$ を変形すると

$$x^2 + 2(a-1)x + y^2 - 2(2a-3)y = -6a^2 + 15a - 8$$
$$\{x + (a-1)\}^2 + \{y - (2a-3)\}^2 = -6a^2 + 15a - 8 + (a-1)^2 + (2a-3)^2$$
$$(x + a - 1)^2 + (y - 2a + 3)^2 = -a^2 + a + 2$$

これが，円を表すから　$-a^2 + a + 2 > 0$

ゆえに　$a^2 - a - 2 < 0$

したがって　$(a+1)(a-2) < 0$

よって　$\boldsymbol{-1 < a < 2}$

(答) ウ．-1　エ．2

(3) $0 \leqq x < \pi$ より　$\dfrac{\pi}{3} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{3} < 2\pi + \dfrac{\pi}{3}$

このとき，$\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす x は

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{x = \frac{\pi}{2},\ \frac{2}{3}\pi}$$

(答) オ．カ．$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{2}{3}\pi$

(4) 与式を変形すると　　$2^{-\frac{1}{2}} < 2^{2-\frac{1}{2}x} < 2^{x-\frac{1}{2}}$

底 2 は 1 より大きいから　$-\frac{1}{2} < 2 - \frac{1}{2}x < x - \frac{1}{2}$

これを解いて　　$\boldsymbol{\frac{5}{3} < x < 5}$

(答) ケ. $\frac{5}{3}$　コ. 5

(5) $F(x) = \int_0^x (t^2 - 3t + 2)dt$ を x について微分すると

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^x (t^2 - 3t + 2)dt = x^2 - 3x + 2$$

$F(x)$ が減少するのは，$F'(x) < 0$ となる x の値の範囲であるから

$x^2 - 3x + 2 < 0$　これを解いて　$\boldsymbol{1 < x < 2}$

(答) ケ. 1　コ. 2

[2] (1) y は x と共役であるから　$y = 2 + \sqrt{3}i$

$$x + y = (2 - \sqrt{3}i) + (2 + \sqrt{3}i) = 4$$
$$xy = (2 - \sqrt{3}i)(2 + \sqrt{3}i) = 7$$

したがって

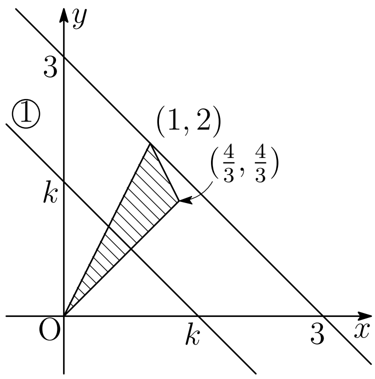
$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = 4^2 - 2 \cdot 7 = \mathbf{2}$$
$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 4^3 - 3 \cdot 7 \cdot 4 = \mathbf{-20}$$

(答) サ. 2　シ. -20

(2) 与えられた連立不等式の表す領域は，3 点

$(0, 0)$，$(\frac{4}{3},\ \frac{4}{3})$，$(1,\ 2)$

を頂点とする三角形の周および内部である．



$x + y = k$　$\cdots$ ①

とおくと，これは傾きが -1，y 切片が k である直線を表す．直線 ① がこの領域と共有点をもつときの k の値の最大値を求めればよい．

したがって，直線 ① が点 $(1,\ 2)$ を通るとき k は最大値 3 をとる．

よって，$x + y$ は，$(x,\ y) = \mathbf{(1,\ 2)}$ のとき，最大値 $\mathbf{3}$ をとる．

(答) ス. $(1,\ 2)$　セ. 3

(3) 与式を変形すると

$$\begin{aligned}2\sqrt{3}\cos 2x + 4\sin x\cos x &= 2\sin 2x + 2\sqrt{3}\cos 2x \\ &= 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ であるから

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \text{ のとき最大値 } \mathbf{4},\ 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6} \text{ のとき最小値 } \mathbf{2}$$

をとる．

(答) ソ．4　タ．2

(4) 真数は正であるから

$$x - 3 > 0,\quad x - 5 > 0 \quad \text{すなわち} \quad x > 5 \quad \cdots ①$$

$\log_3(x-3) < 2 + \log_{\frac{1}{3}}(x-5)$ を変形すると

$$\begin{aligned}\log_3(x-3) + \log_3(x-5) &< 2 \\ \log_3(x-3)(x-5) &< \log_3 9\end{aligned}$$

底 3 は 1 より大きいから　$(x-3)(x-5) < 9$
① に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{5 < x < 4 + \sqrt{10}}$

(答) チ．5　ツ．$4 + \sqrt{10}$

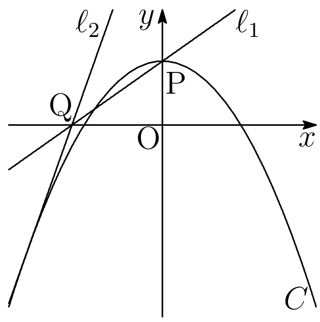
(5) $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4a$ を微分すると　$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
$f(1) = 10$，$f'(1) = 0$ であるから

$$1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + 4a = 10,\quad 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0$$

整理すると　　$5a + b = 9$，$2a + b = -3$
これを解いて　　$\boldsymbol{a = 4,\ b = -11}$

(答) テ．4　ト．-11

[3] ℓ_1 は傾き m，y 切片が $\dfrac{1}{3}$ の直線であるから



$$y = mx + \frac{1}{3}$$

この直線と x 軸との交点の x 座標は

$$mx + \frac{1}{3} = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = -\frac{1}{3m}$$

したがって，Q の座標は $\left(-\boldsymbol{\dfrac{1}{3m}},\ 0\right)$

ℓ_2 の傾きは $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2m}{1-m^2}$

ゆえに，直線 ℓ_2 の方程式は

［1］$m \neq 1$ のとき

$$y = \frac{2m}{1-m^2}\left(x + \frac{1}{3m}\right) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y = \frac{2m}{1-m^2}x + \frac{2}{3(1-m^2)}}$$

［2］$m = 1$ のとき $\boldsymbol{x = -\dfrac{1}{3}}$

ℓ_2 と C が接するのは，［1］の場合であり，C と ℓ_2 から y を消去すると

$$-2x^2 + \frac{1}{3} = \frac{2m}{1-m^2}x + \frac{2}{3(1-m^2)}$$

すなわち $2x^2 + \dfrac{2m}{1-m^2}x + \dfrac{1+m^2}{3(1-m^2)} = 0 \quad \cdots ①$

① の方程式の係数について

$$D/4 = \left(\frac{m}{1-m^2}\right)^2 - 2\cdot\frac{1+m^2}{3(1-m^2)} = \frac{(2m^2-1)(m^2+1)}{3(1-m^2)^2}$$

ℓ_2 が C に接するとき，$D = 0$ であるから $2m^2 - 1 = 0$

$m = \tan\theta\ (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$ であるから，$m > 0$ に注意して $\boldsymbol{m = \dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

また，接点の x 座標は，① および m の値により

$$-\frac{\frac{2m}{1-m^2}}{2\cdot 2} = -\frac{m}{2(1-m^2)} = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

(答) ナ. $-\dfrac{1}{3m}$ ニ. $\dfrac{2m}{1-m^2}x + \dfrac{2}{3(1-m^2)}$ ヌ. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ネ. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

作問ミス

$y=\boxed{\text{ニ}}$ に適する式は，$m\neq 1$ のときであり，$m=1$ のときは，$x=-\dfrac{1}{3}$ となり，$\boxed{\text{ニ}}$ に適用することができない．
本来であれば，$m>0$ であるから

$$m\neq 1 \text{ のとき } y=\boxed{},\quad m=1 \text{ のとき } x=\boxed{}$$

などとすべきところであった．

[4] $y=2x^2$ を微分すると　　$y'=4x$

P における接線の傾きは $4a$ であるから，ℓ の方程式は

$$y-2a^2=4a(x-a) \quad \text{すなわち} \quad \boldsymbol{y=4ax-2a^2}$$

C_1 と ℓ の方程式から y を消去すると

$$x^2-2x-2=4ax-2a^2 \quad \text{すなわち} \quad x^2-2(2a+1)x+2a^2-2=0$$

この方程式の解が $\alpha,\ \beta(\alpha<\beta)$ であるから，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=2(2a+1),\quad \alpha\beta=2a^2-2 \quad \cdots ①$$

このとき　　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4(2a^2+4a+3)$

$\beta-\alpha>0$ であるから　$\boldsymbol{\beta-\alpha=2\sqrt{2a^2+4a+3}}$

C_1 と ℓ で囲まれた部分の面積 S は，①，② に注意して

$$\begin{aligned}
S&=\int_\alpha^\beta\{(4ax-2a^2)-(x^2-2x-2)\}dx\\
&=-\int_\alpha^\beta\{x^2-2(2a+1)x+2a^2-2\}dx\\
&=-\int_\alpha^\beta\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx\\
&=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\boldsymbol{\frac{4}{3}(2a^2+4a+3)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

上式から　　$S=\dfrac{4}{3}\{2(a+1)^2+1\}^{\frac{3}{2}}$

ゆえに，S は $\boldsymbol{a=-1}$ で最小値 $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ をとる．

(答) ノ．$4ax-2a^2$　ハ．$2\sqrt{2a^2+4a+3}$　ヒ．$\dfrac{4}{3}(2a^2+4a+3)^{\frac{3}{2}}$
　フ．-1　ヘ．$\dfrac{4}{3}$