

# 熊本県立技術短期大学校

## 一般入学試験問題

### 数学I・II(90分)

平成22年2月7日

#### 【受験上の注意】

- 1 「解答始め」の合図があるまでは、問題用紙・答案用紙を開かないこと。
- 2 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・解答用紙の枚数の過不足を確認すること。
- 3 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。
- 4 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を上げて試験監督者に合図し、指示を受けること。
- 5 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。
- 6 受験中に机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。
- 7 計算機能及び翻訳機能をもつ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。
- 8 携帯電話等の電源は切っておくこと。

平成 22 年度 熊本県立技術短期大学校一般入学選抜試験  
数学問題 (90 分)

[ 1 ] (1) 等式

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx}{x^2+2x+2}$$

が  $x$  についての恒等式であるとき,  $a = \boxed{\text{ア}}$ ,  $b = \boxed{\text{イ}}$  である。

- (2) 中心が  $(-1, 3)$  で半径が 2 の円を  $x$  軸方向に 3,  $y$  軸方向に  $-2$  だけ平行移動した円の方程式は  $x^2 + y^2 - \boxed{\text{ウ}}x - 2y + \boxed{\text{エ}} = 0$  である。
- (3)  $0 \leq x < 2\pi$  のとき  $y = 3 \sin x - 4 \cos x$  の最大値は  $\boxed{\text{オ}}$ , 最小値は  $\boxed{\text{カ}}$  である。
- (4) 非公開 (作問ミス)
- (5)  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$  は  $x = \boxed{\text{ケ}}$  で極大値,  $x = \boxed{\text{コ}}$  で極小値をとる。

[ 2 ] (1) 直線  $3x - 2y + 6 = 0$  に関して, 点  $(-5, 2)$  と対称な点の座標は  $(\boxed{\text{サ}}, \boxed{\text{シ}})$  である。

- (2)  $\triangle ABC$  において  $AB : BC : CA = 2 : a : 3$  ならば,  $a$  を用いて  $\cos \angle A = \boxed{\text{ス}}$  と書ける。特に  $\angle A = 60^\circ$  ならば,  $a = \boxed{\text{セ}}$  である。
- (3)  $\log_4 x - \log_2 x^2 = 3$  のとき,  $\log_2 x = \boxed{\text{ソ}}$  だから  $x = \boxed{\text{タ}}$  である。
- (4) 不等式  $3^{2x+1} - 28 \times 3^x + 9 < 0$  をみたま  $x$  の範囲は  $\boxed{\text{チ}} < x < \boxed{\text{ツ}}$  である。
- (5) 関数  $f(a) = \int_0^1 (2ax^2 + a^2x) dx$  は,  $a = \boxed{\text{テ}}$  のとき, 最小値  $\boxed{\text{ト}}$  をとる。

[ 3 ] 放物線  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) は点  $(1, 1)$  を通り, 直線  $y = x + 3$  に接する。このとき  $a = \boxed{\text{ナ}}$ ,  $b = \boxed{\text{ニ}}$  である。この放物線と直線  $y = x - 3$  との交点を  $A, B$  とすると,  $AB$  の長さは  $\boxed{\text{ヌ}}$  である。  $O$  を原点とするととき  $\triangle OAB$  の面積は  $\boxed{\text{ネ}}$  である。

[ 4 ] 放物線  $C : y = -x^2 + 4$  と  $x$  軸で囲まれる部分を  $D_1$  とすると,  $D_1$  の面積は  $\boxed{\text{ノ}}$  である。  $x$  軸に平行な直線  $l : y = k$  と  $C$  の交点の座標は  $x = \boxed{\text{ハ}}, \boxed{\text{ヒ}}$  であるから,  $l$  と  $C$  で囲まれる部分を  $D_2$  とすると  $D_2$  の面積は  $\boxed{\text{フ}}$  である。  $D_2$  の面積が  $D_1$  の面積の  $\frac{1}{8}$  となるのは  $k = \boxed{\text{ヘ}}$  のときである。

## 解答例

[ 1 ] (1) 等式の両辺に  $(x - 1)(x^2 + 2x + 2)$  をかけると、次の等式が得られる。

$$3x + 2 = a(x^2 + 2x + 2) + bx(x - 1)$$

右辺を整理すると

$$3x + 2 = (a + b)x^2 + (2a - b)x + 2a$$

両辺の同じ次数の項の係数が等しいから

$$0 = a + b, \quad 3 = 2a - b, \quad 2 = 2a$$

これを解いて  $a = 1, b = -1$

(答) ア. 1 イ. -1

- (2) 平行移動後の円の中心は  $(-1 + 3, 3 - 2)$  すなわち  $(2, 1)$   
半径は 2 であるから、円の方程式は

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2^2 \quad \text{ゆえに} \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

(答) ウ. 4 エ. 1

- (3)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$  を満たす角  $\alpha$  をとると

$$\begin{aligned} \text{このとき} \quad y &= 3 \sin x - 4 \cos x \\ &= 5 \left( \frac{3}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x \right) \\ &= 5(\sin x \cos \alpha - \cos x \sin \alpha) \\ &= 5 \sin(x - \alpha) \end{aligned}$$

$0 \leq x < 2\pi$  のとき  $-1 \leq \sin(x - \alpha) \leq 1$  ゆえに  $-5 \leq y \leq 5$   
よって、 $y$  の最大値は 5、最小値は -5

(答) オ. 5 カ. -5

- (4) 作問ミスのため、問題は非公開。

$$(5) f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると } x = -1, 2$$

したがって,  $f(x)$  の増減表は次のようになる.

$x$	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	極大 12	↘	極小 -15	↗

よって,  $x = -1$  で極大値,  $x = 2$  で極小値をとる.

(答) ケ. -1 コ. 2

[2] (1) 直線  $3x - 2y + 6 = 0$  を  $l$ , 点  $(-5, 2)$  を  $A$  とし,  $l$  に関して  $A$  と対称な点を  $B(p, q)$  とする.

[1]  $l$  の傾きは  $\frac{3}{2}$ , 直線  $AB$  の傾きは  $\frac{q-2}{p+5}$  である.  $l \perp AB$  であるから

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{q-2}{p+5} = -1 \quad \text{すなわち} \quad 2p + 3q + 4 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

[2] 線分  $AB$  の中点  $\left(\frac{p-5}{2}, \frac{q+2}{2}\right)$  が  $l$  上にあるから

$$3 \cdot \frac{p-5}{2} - 2 \cdot \frac{q+2}{2} + 6 = 0 \quad \text{すなわち} \quad 3p - 2q - 7 = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ② を解いて  $p = 1, q = -2$  よって  $(1, -2)$

(答) サ. 1 シ. -2

(2)  $AB : BC : CA = 2 : a : 3$  であるから, 定数  $k$  を用いて ( $k \neq 0$ )

$$AB = 2k, \quad BC = ak, \quad CA = 3k$$

とおくと, 余弦定理により

$$\cos \angle A = \frac{CA^2 + AB^2 - BC^2}{2CA \cdot AB} = \frac{(3k)^2 + (2k)^2 - (ak)^2}{2 \cdot 3k \cdot 2k} = \frac{13 - a^2}{12}$$

特に  $\angle A = 60^\circ$  のとき  $\cos \angle A = \frac{1}{2}$  であるから

$$\frac{13 - a^2}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{ゆえに} \quad a^2 = 7$$

$a > 0$  であるから  $a = \sqrt{7}$

(答) ス.  $\frac{13 - a^2}{12}$  セ.  $\sqrt{7}$

(3) 真数は正であるから  $x > 0$  かつ  $x^2 > 0$

ゆえに  $x > 0 \dots \textcircled{1}$

$\log_2 x = t$  とおくと,  $\textcircled{1}$  に注意して

$$\log_4 x = \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \frac{t}{2}, \quad \log_2 x^2 = 2 \log_2 x = 2t$$

方程式は  $\frac{t}{2} - 2t = 3$  これを解いて  $t = -2$

したがって  $\log_2 x = -2$  よって  $x = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

(答) ソ.  $-2$  タ.  $\frac{1}{4}$

(4)  $3^x = t$  とおくと  $t > 0 \dots \textcircled{1}$

不等式は  $3t^2 - 28t + 9 < 0$

ゆえに  $(3t - 1)(t - 9) < 0$

$\textcircled{1}$  に注意して  $\frac{1}{3} < t < 9$

したがって  $\frac{1}{3} < 3^x < 9$  よって  $-1 < x < 2$

(答) チ.  $-1$  ツ.  $2$

(5) 右辺を変形すると

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 (2ax^2 + a^2x) dx \\ &= \left[ \frac{2}{3}ax^3 + \frac{1}{2}a^2x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}a + \frac{1}{2}a^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( a + \frac{2}{3} \right)^2 - \frac{2}{9} \end{aligned}$$

よって  $a = -\frac{2}{3}$  のとき, 最小値  $-\frac{2}{9}$  をとる.

(答) テ.  $-\frac{2}{3}$  ト.  $-\frac{2}{9}$

[ 3 ] 放物線  $y = ax^2 + x + b$  は点  $(1, 1)$  を通るので

$$1 = a \cdot 1^2 + 1 + b \quad \text{ゆえに} \quad a + b = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

$y = ax^2 + x + b$  と  $y = x + 3$  から  $y$  を消去すると

$$ax^2 + x + b = x + 3 \quad \text{ゆえに} \quad ax^2 = 3 - b$$

これが重解をもつので  $3 - b = 0 \quad \dots \textcircled{2}$

①, ② を解いて  $a = -3, b = 3$

放物線  $y = -3x^2 + x + 3$  と直線  $y = x - 3$  の共有点 A, B の座標は

$$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2} - 3), (\sqrt{2}, \sqrt{2} - 3)$$

したがって, AB の長さは

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\{\sqrt{2} - (-\sqrt{2})\}^2 + \{(\sqrt{2} - 3) - (-\sqrt{2} - 3)\}^2} \\ &= \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

原点 O から直線  $y = x - 3$  ( $x - y - 3 = 0$ ) までの距離  $d$  は

$$d = \frac{|-3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\text{よって} \quad \triangle OAB = \frac{1}{2} AB \cdot d = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{3}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

(答) ナ. -3   二. 3   又. 4   ネ.  $3\sqrt{2}$

[4] 放物線  $C$  と  $x$  軸との共有点の  $x$  座標は,  $-x^2 + 4 = 0$  を解いて  $x = \pm 2$

$-2 \leq x \leq 2$  では  $y \geq 0$  であるから,  $D_1$  の面積  $S_1$  は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx \\ &= - \int_{-2}^2 (x+2)(x-2) dx \\ &= - \left( -\frac{1}{6} \right) \{2 - (-2)\}^3 = \frac{32}{3} \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$C$  と  $\ell$  の共有点の  $x$  座標は

$$-x^2 + 4 = k \quad \text{これを解いて} \quad x = \pm \sqrt{4-k}$$

$\sqrt{4-k} = \alpha \dots \textcircled{2}$  とおくと,  $-\alpha \leq x \leq \alpha$  では  $-x^2 + 4 \geq k$  であるから,

$D_2$  の面積  $S_2$  は

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\alpha}^{\alpha} \{(-x^2 + 4) - k\} dx \\ &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} \{x^2 - (4-k)\} dx \\ &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^2 - \alpha^2) dx \\ &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} (x+\alpha)(x-\alpha) dx \\ &= - \left( -\frac{1}{6} \right) \{\alpha - (-\alpha)\}^3 = \frac{4}{3} \alpha^3 \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

このとき  $S_2 = \frac{4}{3}(\sqrt{4-k})^3 = \frac{4}{3}(4-k)\sqrt{4-k}$

$D_2$  の面積が  $D_1$  の面積の  $\frac{1}{8}$  となるとき

$$S_2 = S_1 \times \frac{1}{8} = \frac{32}{3} \times \frac{1}{8} = \frac{4}{3}$$

これを  $\textcircled{3}$  に代入すると  $\frac{4}{3}\alpha^3 = \frac{4}{3}$  ゆえに  $\alpha = 1$

$\textcircled{2}$  より  $\sqrt{4-k} = 1$  よって  $k = 3$

(答) ノ.  $\frac{32}{3}$  ハ. ヒ.  $\pm\sqrt{4-k}$  フ.  $\frac{4}{3}(4-k)\sqrt{4-k}$  ヘ. 3