熊本県立技術短期大学校

一般入学試験問題

数学I・II(90分)

平成21年2月8日

【受験上の注意】

1 「解答始め」の合図があるまでは、問題用紙・答案用紙を開かないこと。

2 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・解答用紙の枚数の過不足を確かめること。

3 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。

4 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を上げて試験監督者に合図し、指示を受けること。

5 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。

6 受験中に机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計 (時計機能だけのもの) 及び眼鏡のみとする。

7 計算機能及び翻訳機能をもつ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。

8 携帯電話等の電源は切っておくこと。

平成 21 年度　熊本県立技術短期大学校一般入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) $\triangle$ABC において，AB $= 2$，BC $= 5$，CA $= 4$ ならば，$\cos\angle$ABC $=$ $\boxed{ア}$ で，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{イ}$ である。

(2) 方程式 $x^3 = 8$ の虚数解の一つを ω とするとき，$\omega^2 + 2\omega + 4 =$ $\boxed{ウ}$，$\omega^4 + 3\omega^3 + 4\omega^2 =$ $\boxed{エ}$ である。

(3) 点 P$(2,\ 1)$ から直線 $2x + 3y = 20$ におろした垂線を PH とする。このとき，H の座標は $\boxed{オ}$ であり，2 点 P，H の距離は $\boxed{カ}$ である。

(4) $2^{x+2} - 33 + 2^{3-x} < 0$ をみたす x の範囲は $\boxed{キ}$ $< x <$ $\boxed{ク}$ である。

(5) 長方形 ABCD において，AB $=$ 2km，BC $=$ 3km とする。時刻 0 で，点 P が A を出発し B に向かって時速 2km で，点 Q が B を出発して C に向かって時速 3km で動くとする。このとき，出発して $\boxed{ケ}$ 時間までは 2 点 P，Q の距離は減少し，P が B に到着するまでの P，Q の最短距離は $\boxed{コ}$ km である。

[2] (1) 整式 $P(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割った余りが $-2x + 3$ で $x^2 - 2x - 3$ で割った余りが $x + 2$ とする。このとき，$P(x)$ を $x^2 - 5x + 6$ で割った余りは $\boxed{サ}$ $x +$ $\boxed{シ}$ である。

(2) 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + 3x + b = 0$ が $x = -1$ を解にもち，それ以外の解を α，β とするとき，$\alpha + \beta = 3$ ならば，$a =$ $\boxed{ス}$，$b =$ $\boxed{セ}$ である。

(3) 原点 O を通る直線 $y = mx\ (m > 0)$ と円 $(x - 4)^2 + y^2 = 4$ の 2 交点を P，Q とする。OP : OQ $= 2 : 3$ ならば，点 P の x 座標は $\boxed{ソ}$ で $m =$ $\boxed{タ}$ である。

(4) $\log_{10} 2 = 0.3010$ とするとき，8^{10} は $\boxed{チ}$ 桁の数であり，5^{10} は $\boxed{ツ}$ 桁の数である。

(5) 放物線 $y = x^2 - x$ と直線 $y = ax\ (a \geqq 0)$ で囲まれる部分を D とすると，D の面積は $\boxed{テ}$ である。x 軸より上にある D の部分の面積と x 軸より下にある D の部分の面積が等しいならば a の値は $\boxed{ト}$ である。

[3] 放物線 $C : y = ax^2$ と，原点 O を通り x 軸の正の部分とのなす角が θ の直線との交点を P，O を通り x 軸の正方向とのなす角が 2θ の直線との交点を Q とする。ただし $0 < a$，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。$m = \tan\theta$ とおくと，P の x 座標は a と m を用いて $\boxed{\text{ナ}}$ と書ける。また C 上の点 R を，R の x 座標が P の x 座標の 2 倍であるようにとると，2 点 P，R を通る直線の傾きは $\boxed{\text{ニ}}$ である。2 点 P，R を通る直線が 2 点 O，Q を通る直線と平行であるあるならば $m = \boxed{\text{ヌ}}$ であるから，$\theta = \boxed{\text{ネ}}$ で Q の x 座標は P の x 座標の $\boxed{\text{ノ}}$ 倍である。

[4] $x = \sin\theta - \cos\theta\ (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると，$x = \sqrt{2}\sin(\theta - \boxed{\text{ハ}})$ と表すことができるので，x のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ヒ}} \leqq \theta \leqq \boxed{\text{フ}}$ となる。このとき関数 $y = 5x^3 + 6x^2 - 6$ は $\theta = \boxed{\text{ヘ}}$ のとき，最小値 $\boxed{\text{ホ}}$ をとる。

解答例

[1] (1) $a = 5$，$b = 4$，$c = 2$ であるから，余弦定理により

$$\cos\angle\mathrm{ABC} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{2^2 + 5^2 - 4^2}{2{\cdot}2{\cdot}5} = \boldsymbol{\frac{13}{20}}$$

$\sin\angle\mathrm{ABC} > 0$ であるから　　$\sin\angle\mathrm{ABC} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{13}{20}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{231}}{20}$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}ca\sin\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2}{\cdot}2{\cdot}5 \times \dfrac{231}{20} = \boldsymbol{\dfrac{\sqrt{231}}{4}}$

(答) ア．$\dfrac{13}{20}$　イ．$\dfrac{\sqrt{231}}{4}$

(2) ω はこの方程式の解であるから

$$\omega^3 = 8 \qquad \text{ゆえに} \qquad (\omega - 2)(\omega^2 + 2\omega + 4) = 0$$

ω は虚数であるから，$\omega - 2 \neq 0$ より　　$\omega^2 + 2\omega + 4 = \mathbf{0}$

$\omega^4 + 3\omega^3 + 4\omega^2 = \omega^2(\omega^2 + 2\omega + 4) + \omega^3$ であるから，上の結果を代入して

$$\omega^4 + 3\omega^3 + 4\omega^2 = \omega^2 \times 0 + 8 = \mathbf{8}$$

(答) ウ．0　エ．8

(3) 点 P(2, 1) を通り直線 $2x + 3y = 20 \cdots ①$ に垂直な直線の方程式は

$$3(x - 2) - 2(y - 1) = 0 \quad \text{すなわち} \quad 3x - 2y = 4 \cdots ②$$

H の座標は ①，② の連立方程式の解であるから　　**H(4, 4)**

よって　　$\mathrm{PH} = \sqrt{(4-2)^2 + (4-1)^2} = \boldsymbol{\sqrt{13}}$

(答) オ．(4, 4)　カ．$\sqrt{13}$

(4) 方程式を変形すると　$4(2^x)^2 - 33{\cdot}2^x + 8 < 0$

ゆえに　$(2^x - 8)(4{\cdot}2^x - 1) < 0$

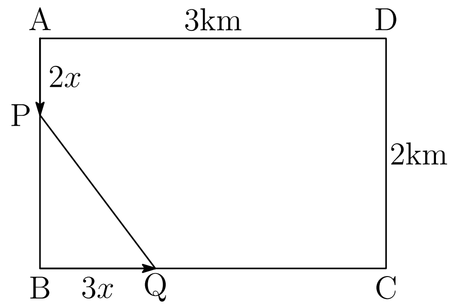
したがって　$\dfrac{1}{4} < 2^x < 8$

底 2 は 1 より大きいので　$\boldsymbol{-2 < x < 3}$

(答) キ. -2　ク. 3

(5) x 時間後の AP，BQ の距離は $(0 < x < 1)$，それぞれ $2x$ km，$3x$ km であるから，△PBQ を三平方定理に適用して

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= \mathrm{PB}^2 + \mathrm{BQ}^2\\ &= (2-2x)^2 + (3x)^2\\ &= 13x^2 - 8x + 4\\ &= 13\left(x - \frac{4}{13}\right)^2 + \frac{36}{13}\end{aligned}$$



したがって，$\boldsymbol{\dfrac{4}{13}}$ 時間まで 2 点 P，Q の距離は減少し，

P が B に到着するまでの P，Q の最短距離は　$\sqrt{\dfrac{36}{13}} = \boldsymbol{\dfrac{6\sqrt{13}}{13}}$　(km)

(答) ケ. $\dfrac{4}{13}$　コ. $\dfrac{6\sqrt{13}}{13}$

[2] (1) $P(x)$ を $x^2 - 5x + 6$ で割った余りを $ax + b$ とおいて，商を $Q(x)$ とすると

$$P(x) = (x-2)(x-3)Q(x) + ax + b$$

この等式より　$P(2) = 2a + b$，$P(3) = 3a + b$

また，$P(x)$ を $x^2 - x - 2$ で割ったときの商を $Q_1(x)$，$x^2 - 2x - 3$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると，条件から

$$P(x) = (x+1)(x-2)Q_1(x) - 2x + 3$$
$$P(x) = (x+1)(x-3)Q_2(x) + x + 2$$

第 1 式に $x = 2$，第 2 式に $x = 3$ を代入すると

$$P(2) = -1,\ P(3) = 5$$

したがって　$2a + b = -1$，$3a + b = 5$

これを解くと　$a = 6$，$b = -13$

よって，求める余りは　$\boldsymbol{6x - 13}$

(答) サ. 6　シ. -13

(2) $x=-1$ は3次方程式 $x^3+ax^2+3x+b=0$ の解であるから

$$(-1)^3+a(-1)^2+3(-1)+b=0 \quad すなわち \quad a+b=4 \quad \cdots ①$$

この3次方程式の解と係数の関係により　$\alpha+\beta+(-1)=-\dfrac{a}{1}$

$\alpha+\beta=3$ をこれに代入して　$\boldsymbol{a=-2}$　$\cdots$②

② を ① に代入して　$\boldsymbol{b=6}$

(答) ス．-2　セ．6

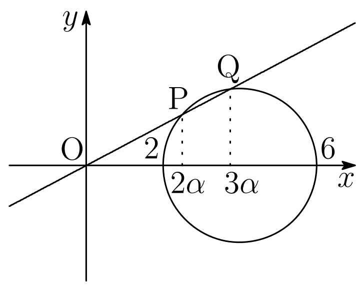
3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の解を α，β，γ とすると

$$\boldsymbol{\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}}$$

(3) $\mathrm{OP}:\mathrm{OQ}=2:3$ であるから，2 点 P，Q の x 座標をそれぞれ 2α，3α とおける．

$y=mx\ (m>0)$ を $(x-4)^2+y^2=4$ に代入して整理すると



$$(m^2+1)x^2-8x+12=0$$

このとき，解と係数の関係から

$$2\alpha+3\alpha=-\frac{-8}{m^2+1} \qquad 2\alpha\cdot 3\alpha=\frac{12}{m^2+1}$$

ゆえに　$\dfrac{5\alpha}{8}=\dfrac{1}{m^2+1}$　　$\dfrac{\alpha^2}{2}=\dfrac{1}{m^2+1}$

上の2式から　$\alpha=\dfrac{5}{4}$，$\boldsymbol{m=\dfrac{\sqrt{7}}{5}}$

ゆえに，点 P の x 座標は　$2\alpha=2\times\dfrac{5}{4}=\boldsymbol{\dfrac{5}{2}}$

(答) ソ．$\dfrac{5}{2}$　タ．$\dfrac{\sqrt{7}}{5}$

(4) $\log_{10} 8^{10} = \log_{10} 2^{30} = 30 \log_{10} 2 = 30 \times 0.3010 = 9.03$

$\log_{10} 5^{10} = 10 \log_{10} \dfrac{10}{2} = 10(\log_{10} 10 - \log_{10} 2) = 10(1 - 0.3010) = 6.99$

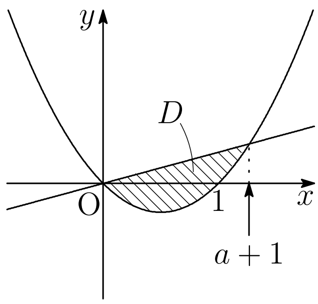
$9 < \log_{10} 8^{10} < 10$，$6 < \log_{10} 5^{10} < 7$ であるから

$$10^9 < 8^{10} < 10^{10},\ 10^6 < 5^{10} < 10^7$$

よって，8^{10} は **10** 桁の数であり，5^{10} は **7** 桁の数である．

(答) チ．10　ツ．7

(5) 方程式 $x^2 - x = ax$ を解くと



$x^2 - (a+1)x = 0$ より　$x = 0,\ a+1$

よって，D の面積 S_1 は，図から

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{a+1} \{ax - (x^2 - x)\} dx \\ &= -\int_0^{a+1} x\{x - (a+1)\} dx \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}(a+1)^3} \end{aligned}$$

この放物線と x 軸の交点の x 座標は

$x^2 - x = 0$ より　$x = 0,\ 1$

よって，x 軸より下にある D の部分の面積 S_2 は，図から

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^1 \{-(x^2 - x)\} dx \\ &= -\int_0^1 x(x-1) dx \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

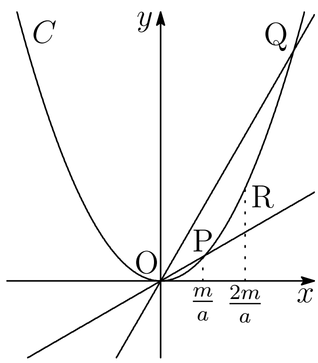
x 軸より上にある D の部分の面積と x 軸より下にある D の部分の面積が等しいとき，$S_1 = 2S_2$ が成り立つので

$\dfrac{1}{6}(a+1)^3 = 2 \times \dfrac{1}{6}$　これを解いて　$\boldsymbol{a = \sqrt[3]{2} - 1}$

(答) テ．$\dfrac{1}{6}(a+1)^3$　ト．$\sqrt[3]{2} - 1$

[3] 直線 OP の傾きは m であるから，
その方程式は　　$y = mx$
P の座標は $(x \neq 0)$，$y = ax^2$ と $y = mx$
を解いて

$$\mathrm{P}\left(\boldsymbol{\frac{m}{a}},\ \frac{m^2}{a}\right)$$



C 上の点 R の x 座標は $\dfrac{2m}{a}$ であるから

$$\mathrm{R}\left(\frac{2m}{a},\ \frac{4m^2}{a}\right)$$

よって，直線 PR の傾きは　$\dfrac{\dfrac{4m^2}{a} - \dfrac{m^2}{a}}{\dfrac{2m}{a} - \dfrac{m}{a}} = \boldsymbol{3m}$

また，直線 OQ の傾きは　$\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2m}{1-m^2}$

2 直線 PR，OQ が平行であるとき　$3m = \dfrac{2m}{1-m^2}$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ であるから，$m = \tan\theta > 0$ に注意して，この方程式を解くと

$$\boldsymbol{m = \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{6}}$$

したがって，直線 OQ の傾きは　$\tan 2\theta = \tan\left(2 \times \dfrac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

このとき，P の x 座標は $(x \neq 0)$，$ax^2 = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ を解いて　$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}\,a}$

Q の x 座標は $(x \neq 0)$，$ax^2 = \sqrt{3}\,x$ を解いて　$x = \dfrac{\sqrt{3}}{a}$

よって，$\dfrac{\sqrt{3}}{a} \div \dfrac{1}{\sqrt{3}\,a} = 3$ より，Q の x 座標は P の x 座標の **3** 倍である．

(答) ナ. $\dfrac{m}{a}$　ニ. $3m$　ヌ. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　ネ. $\dfrac{\pi}{6}$　ノ. 3

[4] $$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta-\dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ であるから

$$x=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right),\qquad \boldsymbol{-1 \leqq x \leqq \sqrt{2}}$$

$y=5x^3+6x^2-6$ を微分して　$y'=15x^2+12x=3x(5x+4)$

$y'=0$ とすると　$x=-\dfrac{4}{5},\ 0$

y の増減表は次のようになる．

x	-1	$\cdots$	$-\frac{4}{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-5	$\nearrow$	極大 $-\frac{118}{25}$	$\searrow$	極小 -6	$\nearrow$	$6+10\sqrt{2}$

よって，この関数は

$x=0$　すなわち　$\boldsymbol{\theta=\dfrac{\pi}{4}}$ のとき，最小値 $\boldsymbol{-6}$ をとる．

(答) ハ．$\dfrac{\pi}{4}$　ヒ．-1　フ．$\sqrt{2}$　ヘ．$\dfrac{\pi}{4}$　ホ．-6