熊本県立技術短期大学校

一般入学試験問題

数学 I・II(90分)

平成20年2月10日

【受験上の注意】

1 「解答始め」の合図があるまでは、問題用紙・答案用紙を開かないこと。

2 「解答始め」の合図があったら、まず問題用紙・解答用紙の枚数の過不足を確かめること。

3 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。

4 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を上げて試験監督者に合図し、指示を受けること。

5 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。

6 受験中に机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計 (時計機能だけのもの) 及び眼鏡のみとする。

7 計算機能及び翻訳機能をもつ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。

8 携帯電話等の電源は切っておくこと。

平成 20 年度　熊本県立技術短期大学校一般入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) $x = 2+\sqrt{3}$ のとき，x^2-4x+1 の値は $\boxed{\text{ア}}$ である。このとき x^3-2x^2-7x+7 の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 放物線 $C: y = -2x^2-2x+2$ を平行移動して，x 軸と 2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ で交わるようにするためには，C を x 軸方向に $\boxed{\text{ウ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$ だけ平行移動すればよい。

(3) $x = 1+2i$ が方程式 $x^3-4x^2+ax+b=0$ の解であるとき，実数の係数 a，b の値は，$a = \boxed{\text{オ}}$，$b = \boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 方程式 $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^4 + 3 = 0$ の解は $x = \boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。

(5) $\triangle$ABC において AB $=2$，BC $=\sqrt{7}$，CA $=1$ ならば，$\angle$BAC $= \boxed{\text{ケ}}^\circ$ で $\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{コ}}$ である。

[2] (1) $f(x) = x^3+ax^2+bx+8$ が $(x-2)^2$ で割り切れるならば，$a = \boxed{\text{サ}}$ で，$f(x)=0$ の $x=2$ 以外の解は $x = \boxed{\text{シ}}$ である。

(2) x が $\log_2\left(\dfrac{1}{2}-2^{x-1}\right) = 2x$ をみたすとき，$2^x = \boxed{\text{ス}}$ であるから，$x = \boxed{\text{セ}}$ である。

(3) $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$ の解は $x = \boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{タ}}$ である。

(4) x，y が 3 つの不等式 $y-2x \leqq 4$，$y \geqq x+1$，$x \leqq 0$ を同時にみたすとき，$2y-x$ の最大値は $\boxed{\text{チ}}$，最小値は $\boxed{\text{ツ}}$ となる。

(5) 関数 $y = x^3-2x$ のグラフと直線 $y = x+a$ の共有点の個数が 3 であるのは，a が $\boxed{\text{テ}} < a < \boxed{\text{ト}}$ の範囲にあるときである。

[3] $\triangle$ABC の重心を G とする。2 点 G，A を通る直線が $x-2y+1=0$，2 点 G，B を通る直線が $x+y+4=0$ であるとき，点 G の座標は $\boxed{\text{ナ}}$ である。さらに，点 C の座標が $(-3,-7)$ であるなら，点 A の座標は $\boxed{\text{ニ}}$，点 B の座標は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。2 点 A，B を通る直線と点 C の距離は $\boxed{\text{ネ}}$ であるので，$\triangle$ABC の面積は $\boxed{\text{ノ}}$ である。

[4] 原点Oから，x軸の正方向とのなす角がθの方向に投げられた質点の描く軌跡は，$m=\tan\theta$とおくとき，放物線$C:y=-\dfrac{1}{4}(1+m^2)x^2+mx$であるとする。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$。このとき，$C$と$x$軸との，O以外の交点Pの$x$座標を$\sin 2\theta$を用いて表すと$\boxed{\text{ハ}}$と書けるから，線分OPの長さは$\theta=\boxed{\text{ヒ}}$のとき最大となる。また，$C$と線分OPで囲まれる部分の面積$S$は，$m$を用いて表すと$\boxed{\text{フ}}$，$\sin 2\theta$と$\cos 2\theta$を用いて表すと$\boxed{\text{ヘ}}$となるから，$\theta=\dfrac{\pi}{8}$のときの$S$の値は$\boxed{\text{ホ}}$である。

解答例

[1] (1) $x-2=\sqrt{3}$であるから

両辺を2乗して　$(x-2)^2=3$

よって　$x^2-4x+1=\mathbf{0}$

また，右の割り算から

$$x^3-2x^2-7x+7=(x^2-4x+1)(x+2)+5$$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & & & x & +2 \\ \hline
x^2-4x+1 & x^3 & -2x^2 & -7x & +7 \\
 & x^3 & -4x^2 & +x & \\ \hline
 & & 2x^2 & -8x & +7 \\
 & & 2x^2 & -8x & +2 \\ \hline
 & & & & 5
\end{array}$$

これに上の結果を代入して

$$x^3-2x^2-7x+7=0\times(x+2)+5=\mathbf{5}$$

(答) ア．0　イ．5

(2) 放物線$C:y=-2x^2-2x+2$を平行移動して，x軸と2点$(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$で交わる放物線をC'とすると，C'はx^2の係数に注意して

$$y=-2(x+1)(x-2)\quad すなわち\quad y=-2x^2+2x+4$$

C，C'をそれぞれ変形すると

$$C:y=-2x^2-2x+2=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

$$C':y=-2x^2+2x+4=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

よって，頂点は点$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{2}\right)$から点$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$に移動する．ゆえに，$C$を$x$軸方向に$p$，$y$軸方向に$q$だけ平行移動したものが$C'$であれば，$C$，$C'$の頂点の座標から

$$-\frac{1}{2}+p=\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}+q=\frac{9}{2}\qquad よって\qquad p=\mathbf{1},\ q=\mathbf{2}$$

(答) ウ．1　エ．2

(3) $1+2i$ がこの方程式の解であるから

$$(1+2i)^3-4(1+2i)^2+a(1+2i)+b=0$$

整理して　　$(a+b+1)+(2a-18)i=0$

a, b は実数であるから

$$a+b+1=0,\ 2a-18=0$$

これを解くと　　$\boldsymbol{a=9,\ b=-10}$

(答) オ. 9　カ. -10

(4) 方程式を変形すると　$(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3=0$
ゆえに　$(\log_3 x-1)(\log_3 x-3)=0$
したがって　$\log_3 x=1,\ 3$
よって　$x=3,\ 27$

(答) キ. ク 3, 27

(5) 余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{1^2+2^2-(\sqrt{7})^2}{2\cdot1\cdot2}=-\frac{1}{2}$$

したがって，$\cos A=-\dfrac{1}{2}$ を満たす A は　$\boldsymbol{A=120^\circ}$
よって，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\sin120^\circ=\boldsymbol{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(答) ケ. 120　コ. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[2] (1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+8$ は $(x-2)^2=x^2-4x+4$ で割り切れるので，$f(x)$ の x^3 の係数および定数項に注意して

$$x^3+ax^2+bx+8=(x^2-4x+4)(x+2) \quad \cdots ①$$

とかける．右辺を展開すると

$$x^3+ax^2+bx+8=x^3-2x^2-4x+8$$

x^2 の項を係数を比較して　$\boldsymbol{a=-2}$

① より $f(x)=(x-2)^2(x+2)$ であるから，$f(x)=0$ の $x=2$ 以外の解は

$$\boldsymbol{x=-2}$$

(答) サ．-2　シ．-2

(2) $\log_2\left(\dfrac{1}{2}-2^{x-1}\right)=2x$ から　$\dfrac{1}{2}-2^{x-1}=2^{2x}$

ゆえに　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot 2^x=(2^x)^2$

$2^x=t$ とおくと $(t>0)$　$\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}t=t^2$

整理して　$2t^2+t-1=0$

左辺を因数分解して　$(t+1)(2t-1)=0$

$t>0$ に注意して　$t=\dfrac{1}{2}$

したがって，$\boldsymbol{2^x=\dfrac{1}{2}}$ であるから　$\boldsymbol{x=-1}$

(答) ス．$\dfrac{1}{2}$　セ．-1

(3) 左辺の三角関数を合成すると

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{2}$$

よって　$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}$　$\cdots$①

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき

$$\frac{\pi}{6} \leqq x+\frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi$$

であるから，この範囲で ① を解くと

$$x+\frac{\pi}{6}=\frac{5}{4}\pi \quad \text{または} \quad x+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{4}\pi$$

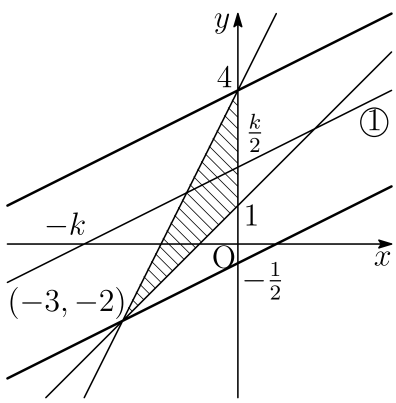
したがって　$\boldsymbol{x=\frac{13}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi}$

(答) ソ．タ．$\frac{13}{12}\pi$，$\frac{19}{12}\pi$

(4) 与えられた連立不等式の表す領域は 3 点 $(-3,-2)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 4)$ を頂点とする三角形の周および内部である．

$$2y-x=k \quad \cdots ①$$

とおくと，これは傾きが $\frac{1}{2}$，y 切片が $\frac{k}{2}$ の直線を表す．



図から，直線 ① が

点 $(0,\ 4)$ を通るとき，$\frac{k}{2}$ は最大

点 $(-3,-2)$ を通るとき，$\frac{k}{2}$ は最小

である．したがって，$2y-x$ は

$x=0$，$y=4$ のとき最大値 $\mathbf{8}$ をとり，

$x=-3$，$y=-2$ のとき最小値 $\mathbf{-1}$ をとる．

(答) チ．8　ツ．-1

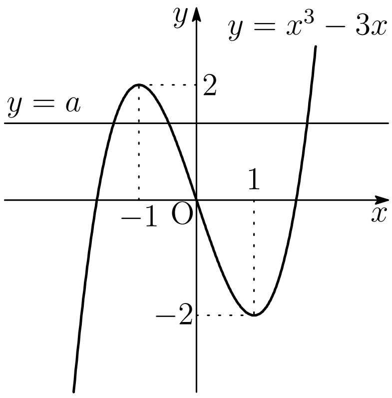
(5) 与えられた関数のグラフと直線の共有点の個数は，方程式

$$x^3 - 2x = x + a \quad \text{すなわち} \quad x^3 - 3x = a$$

の実数解の個数である．
関数 $y = x^3 - 3x$ について

$$y' = 3x^2 - 3x$$
$$= 3x(x - 1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	極大 2	$\searrow$	極小 -2	$\nearrow$



y の増減表は，右のようになる．
よって，$y = x^3 - 3x$ のグラフは，右の図のようになる．
求める a の値の範囲は，このグラフと直線 $y = a$ が異なる 3 個の共有点をもつ範囲であるから

$$\boldsymbol{-2 < a < 2}$$

(答) テ．-2　ト．2

[3] 2点G，Aを通る直線を①とし，2点G，Bを通る直線を②とすると，Gは①および②上の点であるから，Gは連立方程式

$$\begin{cases} x-2y+1=0 & \cdots ① \\ x+y+4=0 & \cdots ② \end{cases}$$

の解であり，これを解いて　$\mathbf{G(-3,-1)}$

また，A，Bの y 座標を，それぞれ s，t とすると，①，②から

$$\mathrm{A}(2s-1,\ s),\ \mathrm{B}(-t-4,\ t)$$

C$(-3,-7)$ のとき，△ABCの重心がG$(-3,-1)$ であることから

$$\frac{(2s-1)+(-t-4)+(-3)}{3}=-3,\quad \frac{s+t+(-7)}{3}=-1$$

整理して　$2s-t=-1$，$s+t=4$

ゆえに　$s=1$，$t=3$

よって　$\mathbf{A(1,\ 1)}$，$\mathbf{B(-7,\ 3)}$

2点A$(1,\ 1)$，B$(-7,\ 3)$ を通る直線 ℓ は

$$y-1=\frac{3-1}{-7-1}(x-1)\qquad \text{すなわち}\qquad x+4y-5=0$$

点C$(-3,-7)$ と直線 ℓ の距離 d は

$$d=\frac{|-3+4\cdot(-7)-5|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\boldsymbol{\frac{36}{\sqrt{17}}}$$

△ABCの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\times d$$

であるから

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(-7-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{68}=2\sqrt{17}$$

したがって

$$S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{17}\times\frac{38}{\sqrt{17}}=\mathbf{36}$$

(答) ナ．$(-3,-1)$　ニ．$(1,\ 1)$　ヌ．$(-7,\ 3)$　ネ．$\dfrac{36}{\sqrt{17}}$　ノ．36

[4] 放物線 C は

$$y = -\frac{1+m^2}{4}x\left(x - \frac{4m}{1+m^2}\right)$$

であるから，C と x 軸との共有点で，O 以外の点 P の x 座標は $\dfrac{4m}{1+m^2}$

これに $m = \tan\theta$ を代入して

$$\frac{4m}{1+m^2} = \frac{4\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{4\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} = \frac{4\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \mathbf{2\sin 2\boldsymbol{\theta}} \quad \cdots ①$$

よって，OP の長さ $2\sin 2\theta$ は，$2\theta = \dfrac{\pi}{2}$，すなわち $\theta = \boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$ のとき最大となる．

また，C と x 軸で囲まれる部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{6}\left(-\frac{1+m^2}{4}\right)\left(\frac{4m}{1+m^2} - 0\right)^3 \\ &= \frac{1}{24}(1+m^2)\left(\frac{4m}{1+m^2}\right)^3 & \cdots ② \\ &= \boldsymbol{\frac{8m^3}{3(1+m^2)^2}} & \cdots ③ \end{aligned}$$

ここで

$$1+m^2 = 1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} = \frac{2}{1+\cos 2\theta} \quad \cdots ④$$

であるから，①，④ を ② に代入して

$$S = \frac{1}{24}\times\frac{2}{1+\cos 2\theta}\times(2\sin 2\theta)^3 = \boldsymbol{\frac{2\sin^3 2\theta}{3(1+\cos 2\theta)}} \quad \cdots ⑤$$

$\theta = \dfrac{\pi}{8}$ のとき，$2\theta = \dfrac{\pi}{4}$ であるから，⑤ より

$$S = \frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3}{3\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{3(\sqrt{2}+1)} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}-1}{3}}$$

(答) ハ. $2\sin 2\theta$　ヒ. $\dfrac{\pi}{4}$　フ. $\dfrac{8m^3}{3(1+m^2)^2}$　ヘ. $\dfrac{2\sin^3 2\theta}{3(1+\cos 2\theta)}$　ホ. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$