熊本県立技術短期大学校

一般入学試験問題

数学I・II(90分)

平成19年2月11日

【受験上の注意】

1 「解答始め」の合図があるまでは、問題用紙・答案用紙を開かないこと。

2 「解答始め」の合図があったら、まず問題・解答用紙の枚数の過不足を確かめること。

3 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。

4 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を上げて試験監督者に合図し、指示を受けること。

5 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。

6 受験中に机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆、シャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計(時計機能だけのもの)及び眼鏡のみとする。

7 計算機能及び翻訳機能をもつ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。

8 携帯電話の電源は切っておくこと。

平成 19 年度　熊本県立技術短期大学校一般入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) 整式 x^3+4x^2+3x+3 を，整式 $x+2$ で割ると，商が x^2+2x+a，余りが b であった。このとき，$a=$ $\boxed{\text{ア}}$，$b=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 2 次関数 $y=2x^2+4x+3$ のグラフ C の頂点の座標は $\boxed{\text{ウ}}$ であり，C を x 軸方向に $\boxed{\text{エ}}$，y 軸方向に $\boxed{\text{オ}}$ だけ平行移動すれば $y=2x^2-2x+1$ のグラフと一致する。

(3) 3 次方程式 $x^3+x^2-ax-4=0$ の 1 つの解が $x=-2$ であるならば，$a=$ $\boxed{\text{カ}}$ で，残りの解は $x=$ $\boxed{\text{キ}}$，$\boxed{\text{ク}}$ である。

(4) $3\cos 2\theta+5\sin\theta+1=0$ が成り立つとき，$\sin\theta=$ $\boxed{\text{ケ}}$ となるから，$-90^\circ<\theta<90^\circ$ とすると $\theta=$ $\boxed{\text{コ}}^\circ$ である。

(5) 関数 $f(x)=x^2+ax+b$ が，$f'(1)=0$，$\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=-3$ を満たすとき，$a=$ $\boxed{\text{サ}}$，$b=$ $\boxed{\text{シ}}$ である。

[2] (1) A(0, 4)，B(4, 2) とする。このとき，A，B 間の距離は $\boxed{\text{ス}}$ で，線分 AB の垂直二等分線は，$y=$ $\boxed{\text{セ}}$ である。

(2) $b>0$ のとき，関数 $y=(2x-1)(x^2+bx+9)$ のグラフと x 軸との共有点の個数が 2 個ならば，$b=$ $\boxed{\text{ソ}}$ である。このとき，この関数は $\boxed{\text{タ}}<x<\boxed{\text{チ}}$ の範囲で減少する。

(3) $0<x<\pi$，$\tan x=-2\sqrt{2}$ のとき，$\cos x=$ $\boxed{\text{ツ}}$，$\cos\dfrac{x}{2}=$ $\boxed{\text{テ}}$ である。

(4) $3^{3x}-3^{2x+2}-3^x+9=0$ を満たす x は，$x=$ $\boxed{\text{ト}}$，$\boxed{\text{ナ}}$ である。

(5) 2 曲線 $C_1: y=-2x^2+x+2$ と $C_2: y=x^2-2x-4$ の交点の x 座標は $x=$ $\boxed{\text{ニ}}$，$\boxed{\text{ヌ}}$ であり，C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{ネ}}$ である。

[3] 3 点 A$(-1,\ 0)$，B$(2,\ 3)$，C$(1,\ 5)$ について，点 A と直線 BC の距離は $\boxed{\text{ノ}}$ である。また，△ABC の面積は $\boxed{\text{ハ}}$ である。直線 BC に平行な直線 ℓ が，△ABC の面積を 2 等分するとき，点 A と直線 ℓ の距離は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。また，直線 ℓ と y 軸との交点の y 座標は $\boxed{\text{フ}}$ である。

[4] 2 次曲線 $C: y=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x^2+x-6)$ 上の点 P$(-1,\ \sqrt{3})$ における C の接線と x 軸のなす角を θ とすると $\tan\theta=$ $\boxed{\text{ヘ}}$ である。P を通り，x 軸とのなす角が $\theta+\dfrac{\pi}{6}$ である直線 ℓ の傾きは $\boxed{\text{ホ}}$ であるから，ℓ の方程式は $y=$ $\boxed{\text{マ}}$ である。また，直線 ℓ と x 軸との交点の x 座標は $\boxed{\text{ミ}}$ である。

解答例

[1] (1) 右の割り算から

$\boldsymbol{a = -1,\ b = 5}$

$$
\begin{array}{r|rrrr}
\multicolumn{1}{r}{} & x^2 & +2x & -1 & \\
\cline{2-5}
x+2 & x^3 & +4x^2 & +3x & +3 \\
\multicolumn{1}{r}{} & x^3 & +2x^2 & & \\
\cline{2-4}
\multicolumn{1}{r}{} & & 2x^2 & +3x & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & 2x^2 & +4x & \\
\cline{3-5}
\multicolumn{1}{r}{} & & & -x & +3 \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & -x & -2 \\
\cline{4-5}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & 5
\end{array}
$$

(別解) 与えられた条件から，等式

$$x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = (x+2)(x^2 + 2x + a) + b$$

が成り立つ．右辺を整理すると

$$x^3 + 4x^2 + 3x + 3 = x^3 + 4x^2 + (a+4)x + (2a+b)$$

両辺の同じ次数の項の係数は等しいから

$$3 = a + 4,\ \ 3 = 2a + b$$

これを解いて　$\boldsymbol{a = -1,\ b = 5}$

(答) ア．-1　イ．5

(2) $y = 2x^2 + 4x + 3 \cdots$ ① を変形すると　$y = 2(x+1)^2 + 1$
ゆえに，① の頂点の座標は　$\boldsymbol{(-1, -1)}$
$y = 2x^2 - 2x + 1 \cdots$ ② を変形すると　$y = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$

よって，頂点は点 $(-1,\ 1)$ から点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ に移動する．ゆえに ① のグラフを x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動して ② のグラフに一致するとすれば，①，② の頂点の座標から

$$-1 + p = \frac{1}{2},\ \ 1 + q = \frac{1}{2}$$

これを解いて　$p = \boldsymbol{\dfrac{3}{2}},\ \ q = \boldsymbol{-\dfrac{1}{2}}$

(答) ウ．$(-1,\ 1)$　エ．$\dfrac{3}{2}$　オ．$-\dfrac{1}{2}$

(3) $x=-2$ が，この方程式の解であるから

$$(-2)^3+(-2)^2-a\cdot(-2)-4=0$$

整理して　$2a-8=0$

ゆえに　$\boldsymbol{a=4}$

よって，方程式は

$$\begin{aligned} x^3+x^2-4x-4&=0 \\ x^2(x+1)-4(x+1)&=0 \\ (x+1)(x^2-4)&=0 \\ (x+1)(x+2)(x-2)&=0 \end{aligned}$$

したがって，残りの解は　$\boldsymbol{x=-1,\ 2}$

(答) カ．4　キ．ク．$-1,\ 2$

(4) 左辺を変形すると　$3(1-2\sin^2\theta)+5\sin\theta+1=0$

整理すると　$6\sin^2\theta-5\sin\theta-4=0$

ゆえに　$(2\sin\theta+1)(3\sin\theta-4)=0$

$-90^\circ<\theta<90^\circ$ より $-1<\sin\theta<1$ であるから　$\boldsymbol{\sin\theta=-\frac{1}{2}}$

この範囲で解いて　$\boldsymbol{\theta=-30^\circ}$

(答) ケ．$-\dfrac{1}{2}$　コ．-30

(5) $f(x)$ を微分して　$f'(x)=2x+a$

$f'(1)=0$ より　$2\cdot1+a=0$

よって　$\boldsymbol{a=-2}$

$f(x)=x^2-2x+b$ であるから

条件より　$\displaystyle\int_0^3(x^2-2x+b)\,dx=-3$

$$\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+bx\right]_0^3=-3$$

$$\frac{1}{3}\cdot3^3-3^2+b\cdot3=-3$$

整理して　$3b=-3$

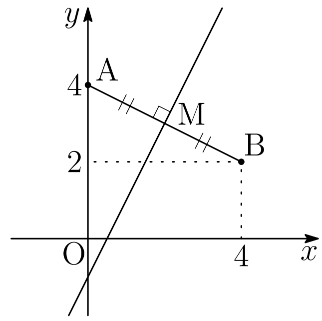
よって　$\boldsymbol{b=-1}$

(答) サ．-2　シ．-1

[2] (1) A，B 間の距離は　$\sqrt{(4-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}=\boldsymbol{2\sqrt{5}}$

線分 AB の中点 M の座標は

$\left(\dfrac{0+4}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right)$　より　$(2,\ 3)$



線分 AB の傾きは　$\dfrac{2-4}{4-0}=-\dfrac{1}{2}$

線分 AB に垂直な直線の傾き m は

$-\dfrac{1}{2}m=-1$　ゆえに　$m=2$

よって，求める直線の方程式は

$y-3=2(x-2)$　すなわち　$\boldsymbol{y=2x-1}$

(答) ス．$2\sqrt{5}$　セ．$2x-1$

(2) $y=(2x-1)(x^2+bx+9)$ のグラフと x 軸との共有点の x 座標は，$x=\dfrac{1}{2}$ および 2 次方程式 $x^2+bx+9=0$ の解である．このグラフと x 軸との共有点の個数が 2 個であるのは，次の［1］,［2］の場合である。

［1］2 次方程式 $x^2+bx+9=0$ が $\dfrac{1}{2}$ と $\dfrac{1}{2}$ 以外の解をもつ場合

$x=\dfrac{1}{2}$ がこの 2 次方程式の解であるから

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+b\cdot\dfrac{1}{2}+9=0$　これを解いて　$b=-\dfrac{37}{2}$

これは, $b>0$ に反するので不適.

［2］2 次方程式 $x^2+bx+9=0$ が $\dfrac{1}{2}$ 以外の重解をもつ場合

$D=b^2-4\cdot1\cdot9=0$　　$b>0$ より　　$\boldsymbol{b=6}$

このとき，2 次方程式 $x^2+6x+9=0$ は，重解 $x=-3$ $\left(\neq\dfrac{1}{2}\right)$ をもつ.

よって　$y=(2x-1)(x^2+6x+9)$

$=2x^3+11x^2+12x-9$

微分して　$y'=6x^2+22x+12$

$=2(x+3)(3x+2)$

$y'=0$ とすると　$x=-3,\ -\dfrac{2}{3}$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大	↘	極小	↗

増減表は，右のとおりである．よって，$\boldsymbol{-3<x<-\dfrac{2}{3}}$ の範囲で減少する.

(答) ソ．6　タ．-3　チ．$-\dfrac{2}{3}$

(3) $0<x<\pi$，$\tan x=-2\sqrt{2}<0$ より $\dfrac{\pi}{2}<x<\pi \quad \cdots$①

$$\cos^2 x=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+(-2\sqrt{2})^2}=\frac{1}{9}$$

① より $\cos x<0$ であるから $\boldsymbol{\cos x=-\dfrac{1}{3}}$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

① より $\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから $\cos\dfrac{x}{2}>0$

ゆえに $\boldsymbol{\cos\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

(答) ツ. $-\dfrac{1}{3}$ テ. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $3^{3x}=(3^x)^3$，$3^{2x+2}=3^{2x}\cdot 3^2=9\cdot(3^x)^2$ であるから，$3^x=t\cdots$① とおくと，方程式は

$$t^3-9t^2-t+9=0$$
$$t^2(t-9)-(t-9)=0$$
$$(t-9)(t^2-1)=0$$
$$(t-9)(t+1)(t-1)=0$$

① より $t>0$ であるから $t=9,\ 1$

ゆえに $3^x=9$ を解いて $x=2$

$3^x=1$ を解いて $x=0$

よって，求める解は $\boldsymbol{x=2,\ 0}$

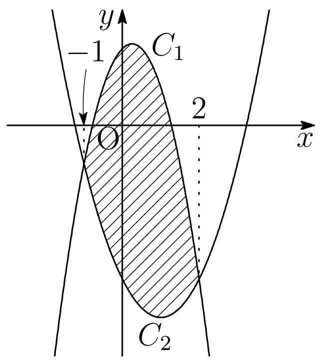
(答) ト. ナ. 2, 0

(5) 2つの放物線の共有点の x 座標は，方程式

$$-2x^2+x+2=x^2-2x-4$$

を解いて　　$\boldsymbol{x=-1,\ 2}$

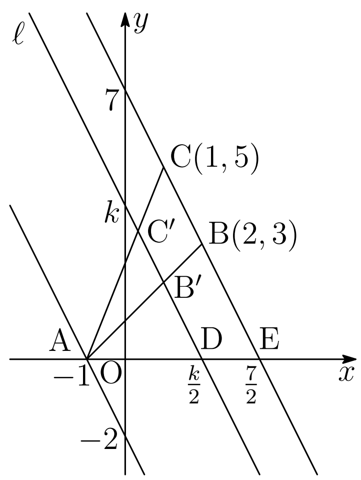
右の図から，求める図形の面積 S は



$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{2}\{(-2x^2+x+2)-(x^2-2x-4)\}\,dx\\&=-3\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)\,dx\\&=-3\times\left(-\frac{1}{6}\right)\{2-(-1)\}^3=\boldsymbol{\frac{27}{2}}\end{aligned}$$

(答) ニ．ヌ．$-1,\ 2$　ネ．$\dfrac{27}{2}$

[3] 2点 B(2, 3)，C(1, 5) を通る直線の方程式は



$$y-3=\frac{5-3}{1-2}(x-2)$$

ゆえに　$2x+y-7=0$

点 A と直線 BC の距離 d は

$$d=\frac{|\,2\cdot(-1)+0-7\,|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\boldsymbol{\frac{9}{\sqrt{5}}}$$

また　$\mathrm{BC}=\sqrt{(1-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{5}$

ゆえに　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{BC}\cdot d=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5}=\boldsymbol{\dfrac{9}{2}}$

ℓ と AB，AC の交点をそれぞれ B$'$，C$'$ とする．

$\triangle\mathrm{AB'C'}$ と $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積比が $1:2$ であるから，相似比は $1:\sqrt{2}$

ゆえに，点 A と直線 ℓ の距離は　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\times\dfrac{9}{\sqrt{5}}=\boldsymbol{\dfrac{9}{\sqrt{10}}}$

直線 ℓ の y 切片を k とすると，その方程式は　$y=-2x+k$

ℓ，直線 BC の x 軸との交点をそれぞれ，D，E とすると，D，E の x 座標は，それぞれ $\dfrac{k}{2}$，$\dfrac{7}{2}$ である．このとき，$\mathrm{AD}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{AE}$ であるから

$$\frac{k}{2}-(-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{7}{2}-(-1)\right\}\quad \text{ゆえに}\quad k=\boldsymbol{\frac{9}{2}\sqrt{2}-2}$$

(答) ノ．$\dfrac{9}{\sqrt{5}}$　ハ．$\dfrac{9}{2}$　ヒ．$\dfrac{9}{\sqrt{10}}$　フ．$\dfrac{9}{2}\sqrt{2}-2$

[4] $y=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(x^2+x-6)$ を微分して　$y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}(2x+1)$

P における接線の傾き $\tan\theta$ は

$x=-1$ のとき　$y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\{2\cdot(-1)+1\}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$　　ゆえに　$\boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}}$

ℓ の傾きは　$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\theta+\tan\dfrac{\pi}{6}}{1-\tan\theta\tan\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\boldsymbol{\dfrac{3\sqrt{3}}{5}}$

したがって，ℓ の方程式は

$$y-\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{5}\{x-(-1)\}\quad \text{ゆえに}\quad \boldsymbol{y=\frac{3\sqrt{3}}{5}x+\frac{8\sqrt{3}}{5}}\quad\cdots①$$

ℓ と x 軸との交点の x 座標は，① に $y=0$ を代入して　$\boldsymbol{x=-\dfrac{8}{3}}$

(答) ヘ．$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$　ホ．$\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$　マ．$\dfrac{3\sqrt{3}}{5}x+\dfrac{8\sqrt{3}}{5}$　ミ．$-\dfrac{8}{3}$