熊本県立技術短期大学校

一般入学試験問題

数学I・II(90分)

平成18年2月12日

【受験上の注意】

1 「解答始め」の合図があるまでは、問題冊子及び答案用紙を開かないこと。

2 解答始めの合図があったら、まず問題・答案用紙の枚数の過不足を確かめること。

3 次に、所定の位置に受験番号を記入すること。

4 印刷不明、トイレ等の場合は、静かに手を上げて試験監督者に合図し、指示を受けること。

5 「解答やめ」の合図があったら、直ちに鉛筆を置き解答を止めること。

6 受験中に机の上に置くことのできるものは、受験票、鉛筆またはシャープペンシル、鉛筆削り、消しゴム、時計 (時計機能だけのもの) 及び、眼鏡のみとする。

7 計算機能及び翻訳機能をもつ機器並びに音を発する機器の使用は禁止する。

8 携帯電話の電源は切っておくこと。

平成 18 年度　熊本県立技術短期大学校一般入学選抜試験
数学問題 (90 分)

[1] (1) 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とし, $\alpha + 1,\ \beta + 1$ を解とする 2 次方程式を $x^2 + x - 4 = 0$ とする。このとき $a = \boxed{\text{ア}}$, $b = \boxed{\text{イ}}$ である。

(2) 円 $(x-1)^2 + y^2 = 5$ と直線 $y = x + k$ が 2 点で交わるとき, k の値の範囲は $\boxed{\text{ウ}} < k < \boxed{\text{エ}}$ である。

(3) $180° < \theta < 270°$, $\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ であるとき, $\sin 2\theta = \boxed{\text{オ}}$, $\cos 2\theta = \boxed{\text{カ}}$ である。

(4) $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ を用いると, 2^{20} は $\boxed{\text{キ}}$ 桁, 3^{10} は $\boxed{\text{ク}}$ 桁の数である。

(5) 曲線 $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x - a$ と x 軸との交点の数は, $a = 5$ のとき $\boxed{\text{ケ}}$ 個, $a = 8$ のとき $\boxed{\text{コ}}$ 個である。

[2] (1) 直線 $\ell : y = 2x + 3$ と点 $(1,\ 5)$ で接する半径 $\sqrt{5}$ の円で, ℓ の下方にある円の中心の座標は $(\boxed{\text{サ}},\ \boxed{\text{シ}})$ である。

(2) $x,\ y$ が 4 つの不等式 $x + 2y \leqq 3,\ 3x + y \leqq 4,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$ を同時に満たすとき, $2x + 3y$ は $x = \boxed{\text{ス}}$, $y = \boxed{\text{セ}}$ で最大値 $\boxed{\text{ソ}}$ をとる。

(3) 不等式 $\log_2(2x+3) \leqq \log_4(-4x-3)$ を満たす x の範囲は $\boxed{\text{タ}} < x \leqq \boxed{\text{チ}}$ である。

(4) $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲で $2\sin\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta$ が最大となるのは, $\theta = \boxed{\text{ツ}}°$ のときで, 最大値は $\boxed{\text{テ}}$ である。

[3] 放物線 $C : y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ 上の点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $\mathrm{Q}(3, -2)$ における C の接線をそれぞれ $\ell,\ m$ とする。$\ell,\ m$ の交点の座標が $(2,\ 1)$ であるとき, $a = \boxed{\text{ト}}$, $b = \boxed{\text{ナ}}$, $c = \boxed{\text{ニ}}$ である。このとき, C と $\ell,\ m$ で囲まれる部分の面積は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。

[4] 原点 O を通り, x 軸の正方向とのなす角が $\theta\ (0° < \theta < 90°)$ である直線を ℓ とする。2 点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ と $\mathrm{Q}(0,\ 2-t)$ を結ぶ直線が ℓ と直交するとき, $\tan\theta$ を t の式で表すと, $\tan\theta = \boxed{\text{ネ}}$ である。ただし, $0 < t < 2$ とする。また, このとき線分 PQ と ℓ の交点を R とすると, 線分 QR の長さは t と $\cos\theta$ を用いて $\boxed{\text{ノ}}$ と書ける。線分 PR の長さが線分 QR の長さの 3 倍であれば, $t = \boxed{\text{ハ}}$ であり, $\theta = \boxed{\text{ヒ}}°$ である。

解答例

[1] (1) 2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=-a, \quad \alpha\beta=b$$

2次方程式 $x^2+x-4=0$ の解と係数の関係から

$$(\alpha+1)+(\beta+1)=-1, \quad (\alpha+1)(\beta+1)=-4$$

すなわち　$(\alpha+\beta)+2=-1, \quad \alpha\beta+(\alpha+\beta)+1=-4$

よって　$-a+2=-1, \quad b+(-a)+1=-4$

これらを解いて　$\boldsymbol{a=3,\ b=-2}$

(答) ア. 3　イ. -2

(2) $(x-1)^2+y^2=5$ と $y=x+k$ から y を消去して整理すると

$$2x^2+2(k-1)x+k^2-4=0$$

が2点で交わるのは, $D>0$ のときであるから

$$\begin{aligned}\{2(k-1)\}^2-4\cdot2\cdot(k^2-4)&>0\\ -4k^2-8k+36&>0\\ k^2+2k-9&<0\end{aligned}$$

したがって　$\boldsymbol{-1-\sqrt{10}<k<-1+\sqrt{10}}$

(答) ウ. $-1-\sqrt{10}$　エ. $-1+\sqrt{10}$

【別解】 点 $(1,\ 0)$ と直線 $x-y+k=0$ の距離 d は

$$d=\frac{|1-0+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{|k+1|}{\sqrt{2}}$$

$d<\sqrt{5}$ より　$|k+1|<\sqrt{10}$

よって　$-\sqrt{10}<k+1<\sqrt{10}$

したがって　$\boldsymbol{-1-\sqrt{10}<k<-1+\sqrt{10}}$

(3) $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\dfrac{4}{5}\right)^2 = \dfrac{9}{25}$

$180^\circ < \theta < 270^\circ$ より $\sin\theta < 0$ であるから

$$\sin\theta = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5}$$

したがって　$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \times \left(-\dfrac{3}{5}\right) \times \left(-\dfrac{4}{5}\right) = \boldsymbol{\dfrac{24}{25}}$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \boldsymbol{\frac{7}{25}}$$

(答) オ. $\dfrac{24}{25}$　カ. $\dfrac{7}{25}$

(4) $$\log_{10} 2^{20} = 20\log_{10} 2 = 20 \times 0.3010 = 6.020$$

$6 < \log_{10} 2^{20} < 7$ であるから

$$\log_{10} 10^6 < \log_{10} 2^{20} < \log_{10} 10^7$$

よって　$10^6 < 2^{20} < 10^7$

したがって, **$\boldsymbol{2^{20}}$ は 7 桁の数**である.

$$\log_{10} 3^{10} = 10\log_{10} 3 = 10 \times 0.4771 = 4.771$$

$4 < \log_{10} 3^{10} < 5$ であるから

$$\log_{10} 10^4 < \log_{10} 3^{10} < \log_{10} 10^5$$

よって　$10^4 < 3^{10} < 10^5$

したがって, **$\boldsymbol{3^{10}}$ は 5 桁の数**である.

(答) キ. 7　ク. 5

(5) 曲線 $y=2x^3-3x^2-12x-a$ と x 軸との共有点の個数は, 方程式

$$2x^3-3x^2-12x-a=0$$

の実数解の個数である. すなわち $y=2x^3-3x^2-12x$ のグラフと直線 $y=a$ の共有点の個数を調べればよい.

関数 $y=2x^3-3x^2-12x$ について

$$y'=6x^2-6x-12$$
$$=6(x+1)(x-2)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大 7	↘	極小 -20	↗

y の増減表は，右のようになる.

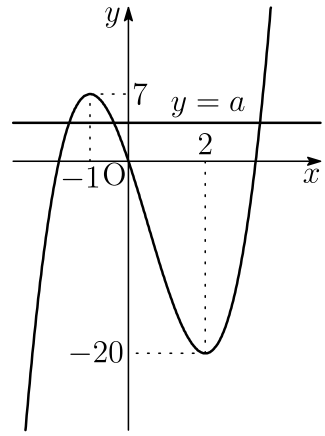
よって, $y=2x^3-3x^2-12x$ のグラフは, 右の図のようになる.

したがって, 求める共有点の個数は

$a=5$ のとき　3 個

$a=8$ のとき　1 個

(答) ケ. 3　コ. 1



[2] (1) 点 $(1,\ 5)$ を P とし, 円の中心の座標を $\mathrm{C}(a,\ b)$ とすると　$b<5$

直線 ℓ の傾きは 2, 直線 PC の傾きは　$\dfrac{b-5}{a-1}$

$\mathrm{PC}\perp\ell$ であるから

$$2\cdot\frac{b-5}{a-1}=-1 \quad \text{すなわち} \quad a-1=-2(b-5) \quad \cdots ①$$

$\mathrm{PC}=\sqrt{5}$　すなわち　$\mathrm{PC}^2=5$ より

$$(a-1)^2+(b-5)^2=5 \quad \cdots ②$$

① を ② に代入して

$$4(b-5)^2+(b-5)^2=5$$

したがって　$(b-5)^2=1$

$b-5<0$ であるから　$b-5=-1$

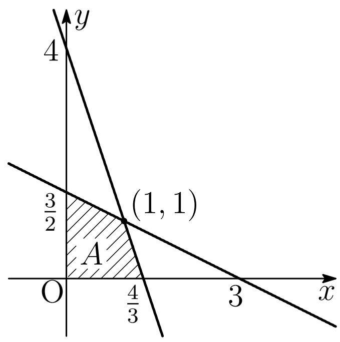
よって　$b=4$　これを ① に代入して　$a=3$　ゆえに　**中心 (3, 4)**

(答) サ. 3　シ. 4

(2) 与えられた連立不等式の表す領域を A とする．
領域 A は 4 点

$$(0,0),\ \left(\frac{4}{3},\ 0\right),\ (1,\ 1),\ \left(0,\ \frac{3}{2}\right)$$

を頂点とする四角形の周および内部である．



$$2x+3y=k \quad \cdots ①$$

とおいて，直線 ① が領域 A の点を通るときの k の値を調べる．

$(0,0)$ を通るとき　$k=0$,　　$\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$ を通るとき　$k=\frac{8}{3}$

$(1,1)$ を通るとき　$k=5$,　　$\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$ を通るとき　$k=\frac{9}{2}$

これ以外で領域 A の点を通るとき　　$0<k<5$

したがって，$2x+3y$ は

　　$\boldsymbol{x=1}$**，**$\boldsymbol{y=1}$ **のとき最大値** $\boldsymbol{5}$ をとる．

(答) ス．1　セ．1　ソ．5

(3) $\log_2(2x+3)=\log_4(2x+3)^2$ より　$\log_4(2x+3)^2 \leqq \log_4(-4x-3)$
したがって

$$\begin{cases} 2x+3>0 \\ (2x+3)^2 \leqq -4x-3 \end{cases}$$

が求める x の値の範囲である．

第 1 式から　　$x>-\frac{3}{2}$　　　　$\cdots ①$

第 2 式から　　$4x^2+16x+12 \leqq 0$

すなわち　　$(x+1)(x+3) \leqq 0$

したがって　　$-3 \leqq x \leqq -1$　　　$\cdots ②$

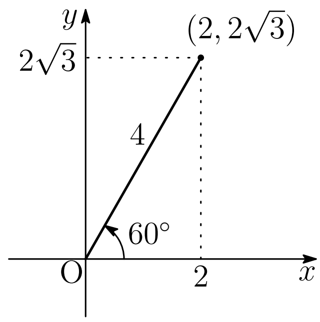
よって, ① と ② の共通範囲を求めて　$\boldsymbol{-\frac{3}{2}<x\leqq -1}$

(答) タ．$-\frac{3}{2}$　チ．-1

(4) $2\sin\theta+2\sqrt{3}\cos\theta=4\sin(\theta+60^\circ)$ であるから

$\boldsymbol{\theta=30^\circ}$ **のとき最大値** $\mathbf{4}$ をとる.

(答) ツ. 30　テ. 4



[3] 放物線 $y=ax^2+bx+c$ は, P(1, 0), Q(3, −2) を通るから

$$0=a+b+c \qquad \cdots ①$$
$$-2=9a+3b+c \qquad \cdots ②$$

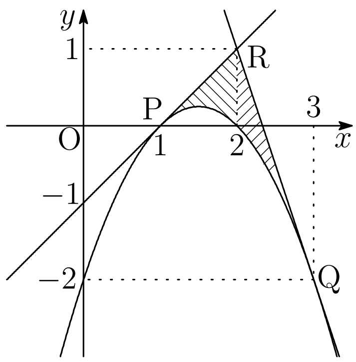
点 (2, 1) を R とすると

直線 PR の傾きは $\dfrac{1-0}{2-1}=1$,　　直線 RQ の傾きは $\dfrac{-2-1}{3-2}=-3$

$y=ax^2+bx+c$ を微分すると　$y'=2ax+b$

直線 PR および直線 RQ の傾きは, P および Q の接線の傾きに等しいから

$$2a+b=1 \qquad \cdots ③$$
$$6a+b=-3 \qquad \cdots ④$$



③, ④ より　$a=-1,\ b=3$

これらを ① に代入して　$c=-2$

$a=-1,\ b=3,\ c=-2$ は ② を満たす.

したがって, $\boldsymbol{a=-1,\ b=3,\ c=-2}$

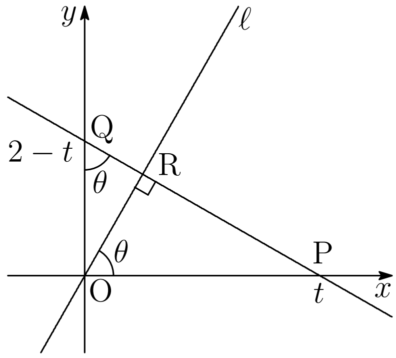
直線 PR の方程式は $y=x-1$, 直線 RQ の方程式は $y=-3x+7$ であるから

求める面積 S は

$$S=\int_1^2\{(x-1)-(-x^2+3x-2)\}\,dx+\int_2^3\{(-3x+7)-(-x^2+3x-2)\}\,dx$$
$$=\int_1^2(x-1)^2\,dx+\int_2^3(x-3)^2\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^2+\left[\frac{1}{3}(x-3)^3\right]_2^3=\frac{1}{3}(2-1)^3-0+\left\{0-\frac{1}{3}(2-3)^3\right\}$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$$

(答) ト. −1　ナ. 3　ニ. −2　ヌ. $\dfrac{2}{3}$

[4] 直線 PQ の傾きは $\dfrac{0-(2-t)}{t-0}=\dfrac{t-2}{t}$



PQ⊥ℓ であるから

$$\frac{t-2}{t}\tan\theta=-1$$

すなわち　$\boldsymbol{\tan\theta=\dfrac{t}{2-t}}$　$\cdots$①

$\angle\mathrm{OQR}=\theta$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{QR}&=\mathrm{OQ}\cos\theta\\&=\boldsymbol{(2-t)\cos\theta}\quad\cdots②\end{aligned}$$

$\mathrm{PR}=\mathrm{OP}\sin\theta$ であるから　$\mathrm{PR}=t\sin\theta$　$\cdots$③

線分 PR の長さが線分 QR の長さの 3 倍であれば，$\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{QR}}=3$ となるから

②, ③ より

$$\frac{t\sin\theta}{(2-t)\cos\theta}=3$$

$$\frac{t}{2-t}\tan\theta=3$$

① より　　$\tan^2\theta=3$

$0^\circ<\theta<90^\circ$ より $\tan\theta>0$ であるから

$\tan\theta=\sqrt{3}$　これを満たす θ は　$\boldsymbol{\theta=60^\circ}$

このとき，$\dfrac{t}{2-t}=\sqrt{3}$ であるから

$$\begin{aligned}t&=\sqrt{3}(2-t)\\(\sqrt{3}+1)t&=2\sqrt{3}\\t&=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}\\&=\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)=\boldsymbol{3-\sqrt{3}}\end{aligned}$$

(答) ネ. $\dfrac{t}{2-t}$　ノ. $(2-t)\cos\theta$　ハ. $3-\sqrt{3}$　ヒ. 60