平成21年度　熊本保健科学大学一般前期入学試験問題
看護学科　数学I・A(平成21年2月4日)

1 次の各問い (**問1〜5**) に答えなさい。

問1 $x+y=2$，$x^3+y^3=32$ のとき，$xy=\boxed{アイ}$ である。

問2 x の2次方程式 $x^2-(2a-1)x+a^2-2a+2=0$ は，$a=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ のとき，重解 $x=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ をもつ。

問3 a，b は定数で $a>0$ とする。2次関数 $y=ax^2-6ax+b$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ の最大値が -3，最小値が -11 のとき，$a=\boxed{キ}$，$b=\boxed{ク}$ である。

問4 $\tan\theta=\sqrt{2}$ のとき，$\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\boxed{ケ}$ である。

問5 三角形ABCにおいて，$\mathrm{AB}=6$，$\mathrm{CA}=4$，$\angle\mathrm{BAC}=120°$ のとき，三角形ABCの面積は $\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}$ である。$\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線と辺BCの交点をDとすると，$\mathrm{AD}=\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$ である。

2 次の各問い (**問1〜5**) に答えなさい。

問1 1から100までの自然数のうち，2で割り切れるが，3で割り切れない数は，$\boxed{アイ}$ 個ある。

問2 男女3人ずつ合計6人の生徒が円形のテーブルのまわりに座るとき，女子3人が隣り合う座り方は，$\boxed{ウエ}$ 通りある。

問3 7人を2人，2人，3人の3組に分ける方法は，$\boxed{オカキ}$ 通りある。

問4 10本のくじの中に当たりくじが2本ある。この3本のくじを同時に引くとき，少なくとも1本は当たりくじを引く確率は，$\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケコ}}$ である。

問5 $\angle\mathrm{BAC}=50°$ の三角形ABCにおいて，内心をIとする。
このとき，$\angle\mathrm{BIC}=\boxed{サシス}°$ である。

3 三角形ABCにおいて，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{CA}=7$，$\angle\mathrm{ABC}=60^\circ$であり，内接円を$\mathrm{O}_1$とする。また，2辺AB，BCおよび円$\mathrm{O}_1$と接する円を$\mathrm{O}_2$とする。

問1 $\mathrm{BC}=\boxed{\text{ア}}$である。

問2 三角形ABCの面積は，$\boxed{\text{イウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$である。

問3 円O_1の半径Rを求めなさい。(解答の過程をすべて記入すること)

問4 円O_2の半径rを求めなさい。(解答の過程をすべて記入すること)

4 aを正の定数とする。2次関数$y=f(x)$のグラフを，x軸方向に-1，y軸方向に2だけ平行移動すると，$y=x^2-2(a-1)x+a+2$のグラフに重なった。(解答の過程をすべて記入すること)

問1 $f(x)$を求めなさい。

問2 $0\leqq x\leqq 2$における$f(x)$の最小値をmとするとき，mをaを用いて表しなさい。

問3 $0\leqq x\leqq 2$において，常に$f(x)>0$が成り立つようなaの値を求めなさい。

解答例

$\boxed{1}$ **問 1** $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ より

$$32=2^3-3xy\cdot 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{xy=-4}$$

問 2 2 次方程式 $x^2-(2a-1)x+a^2-2a+2=0$ が重解をもつとき，$D=0$ であるから

$$\{-(2a-1)\}^2-4\cdot 1(a^2-2a+2)=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=\frac{7}{4}}$$

このとき，重解は

$$x=-\frac{-(2a-1)}{2\cdot 1}=a-\frac{1}{2}=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{5}{4}}$$

問 3 $y=ax^2-6ax+b$ を変形すると　$y=a(x-3)^2-9a+b$

$a>0$ より，$1\leqq x\leqq 4$ において，$x=1$ で最大，$x=3$ で最小となる．

ゆえに　$-5a+b=-3$，$-9a+b=-11$

$a>0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=7}$

問 4
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}&=\frac{(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\&=\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}\\&=2(1+\tan^2\theta)\\&=2\{1+(\sqrt{2})^2\}=\boldsymbol{6}\end{aligned}$$

問 5 $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{6\sqrt{3}}$

$\mathrm{AD}=x$ とおくと

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}&=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\sin 60^\circ\\&=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{3}{2}\sqrt{3}x+\sqrt{3}x=\frac{5}{2}\sqrt{3}x\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{ABC}$ であるから

$$\frac{5}{2}\sqrt{3}x=6\sqrt{3} \quad \text{これを解いて} \quad x=\boldsymbol{\frac{12}{5}}$$

(答) ア．$-$　イ．4　ウ．7　エ．4　オ．5　カ．4　キ．2　ク．7　ケ．6
コ．6　サ．3　シ．1　ス．2　セ．5

$\boxed{2}$ **問 1** 1 から 100 までの自然数全体の集合を U とし，U の部分集合で，2 で割り切れる数の集合を A，3 で割り切れる数の集合を B とする．

求めるのは，$n(A) - n(A \cap B)$ である．

$$n(A) = \{2{\cdot}1,\ 2{\cdot}2,\ 2{\cdot}3,\ \cdots,\ 2{\cdot}50\}$$
$$n(A \cap B) = \{6{\cdot}1,\ 6{\cdot}2,\ 6{\cdot}3,\ \cdots,\ 6{\cdot}16\}$$

よって　$n(A) - n(A \cap B) = 50 - 16 = \mathbf{34}$ (個)

問 2 女子 3 人をひとまとめにする．

男子 3 人と女子ひとまとめの円順列の総数は，$(4-1)!$ 通りある．

また，ひとまとめにした女子 3 人の並び方は，$3!$ 通りある．

よって，並び方の総数は

$$(4-1)! \times 3! = 3{\cdot}2{\cdot}1 \times 3{\cdot}2{\cdot}1 = \mathbf{36}\ (\text{通り})$$

問 3 A 組 2 人，B 組 2 人，C 組 3 人の 3 つの組に分けることを考え，A と B の区別をなくせばよい．よって，分け方の総数は

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2}{2!} = \frac{21 \times 10}{2} = \mathbf{105}\ (\text{通り})$$

問 4 はずれは 8 本ある．よって，引いた 3 本すべてがはずれである確率は

$$\frac{{}_8\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3} = \frac{56}{120} = \frac{7}{15}$$

求めるのは，この事象の余事象の確率であるから

$$1 - \frac{7}{15} = \mathbf{\frac{8}{15}}$$

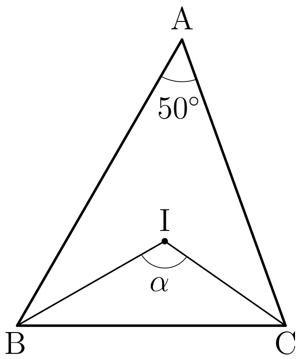
問 5 BI，CI は，それぞれ ∠B，∠C の二等分線であるから

$$\alpha = 180^\circ - \frac{1}{2}(B + C) \quad \cdots ①$$

また　$B + C = 180^\circ - A$

$$= 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ \quad \cdots ②$$

①，② より　$\alpha = 180^\circ - \frac{1}{2} \times 130^\circ = \mathbf{115^\circ}$



(答) ア．3　イ．4　ウ．3　エ．6　オ．1　カ．0　キ．5　ク．8　ケ．1　コ．5
サ．1　シ．1　ス．5

$\boxed{\textbf{3}}$ **問 1** 余弦定理 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ により

$$7^2 = 5^2 + a^2 - 2{\cdot}5{\cdot}a\cos 60^\circ$$

整理して　$a^2 - 5a - 24 = 0$

ゆえに　$(a+3)(a-8) = 0$

$a > 0$ であるから　$\boldsymbol{a = 8}$

問 2 △ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}{\cdot}5{\cdot}8\sin 60^\circ = \frac{1}{2}{\cdot}5{\cdot}8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{10\sqrt{3}}$$

問 3 $2s = a + b + c = 8 + 7 + 5$ より　$s = 10$

△ABC の内接円の半径 R は，$S = Rs$ により

$$10\sqrt{3} = R{\cdot}10 \quad これを解いて \quad \boldsymbol{R = \sqrt{3}}$$

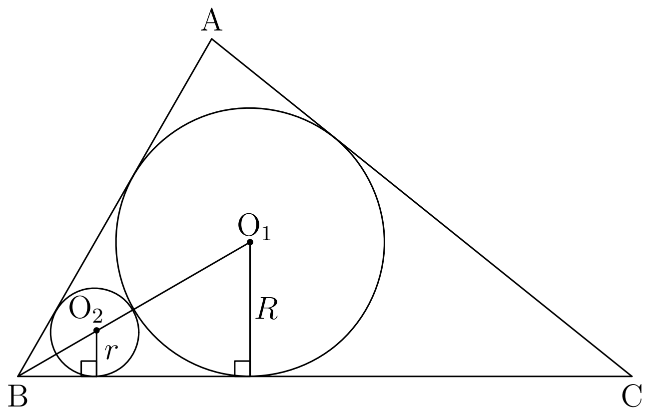
問 4 $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ は，∠B の二等分線上にあるから，

$$\mathrm{BO_1} = 2R,\ \mathrm{BO_2} = 2r,\ \mathrm{O_1O_2} = R + r$$

$\mathrm{BO_1} = \mathrm{BO_2} + \mathrm{O_1O_2}$ より

$$2R = 2r + (R + r) \quad ゆえに \quad r = \frac{R}{3}$$

よって，問 3 の結果から　$\boldsymbol{r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$



(答) ア．8　イ．1　ウ．0　エ．3

$\boxed{4}$ **問 1** 放物線 $y = x^2 - 2(a-1)x + a + 2$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ平行移動すると

$$y + 2 = (x-1)^2 - 2(a-1)(x-1) + a + 2$$
$$y = x^2 - 2ax + 3a - 1$$

これが $y = f(x)$ であるから，右辺を変形すると

$$\boldsymbol{f(x) = (x-a)^2 - a^2 + 3a - 1}$$

問 2 ［1］ $0 < a \leqq 2$ のとき

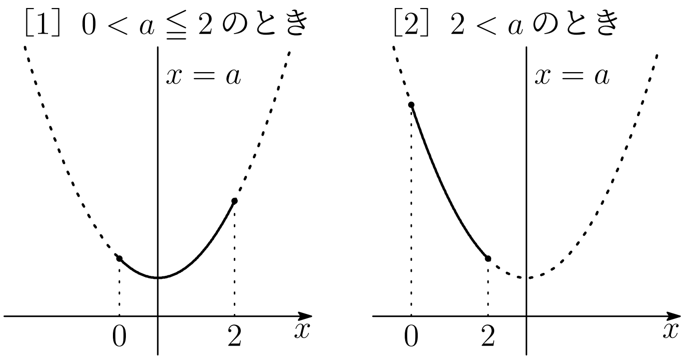
$f(x)$ は $x = a$ で最小となり，最小値は

$$m = f(a) = -a^2 + 3a - 1$$

［2］ $2 < a$ のとき

$f(x)$ は $x = 2$ で最小となり，最小値は

$$m = f(2) = -a + 3$$



よって　$\boldsymbol{0 < a \leqq 2}$ **のとき，** $\boldsymbol{m = -a^2 + 3a - 1}$

$\boldsymbol{2 < a}$ **のとき，** $\boldsymbol{m = -a + 3}$

問 3 $m > 0$ となる a の値の範囲を求めればよい．

［1］ $0 < a \leqq 2$ のとき　$m > 0$ より

$-a^2 + 3a - 1 > 0$　これを解いて　$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < a < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

このとき，a の値の範囲は　$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < a \leqq 2$

［2］ $2 < a$ のとき　$m > 0$ より

$-a + 3 > 0$　これを解いて　$a < 3$

このとき a の値の範囲は　$2 < a < 3$

したがって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < a < 3}$