平成21年度　熊本保健科学大学一般前期入学試験問題
衛生技術学科・リハビリテーション学科
数学I・II(平成21年2月4日)

$\boxed{1}$ 次の各問い (**問1〜5**) に答えなさい。

問1 $x+y=2$，$x^3+y^3=32$ のとき，$xy=\boxed{アイ}$ である。

問2 x の2次方程式 $x^2-(2a-1)x+a^2-2a+2=0$ は，$a=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ のとき，重解 $x=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$ をもつ。

問3 a，b は定数で $a>0$ とする。2次関数 $y=ax^2-6ax+b$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最大値が -3，最小値が -11 のとき，$a=\boxed{キ}$，$b=\boxed{ク}$ である。

問4 $\tan\theta=\sqrt{2}$ のとき，$\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}=\boxed{ケ}$ である。

問5 三角形ABCにおいて，$\mathrm{AB}=6$，$\mathrm{CA}=4$，$\angle\mathrm{BAC}=120^\circ$ のとき，三角形ABCの面積は $\boxed{コ}\sqrt{\boxed{サ}}$ である。$\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線と辺BCの交点をDとすると，$\mathrm{AD}=\dfrac{\boxed{シス}}{\boxed{セ}}$ である。

$\boxed{2}$ 次の各問い (**問1〜5**) に答えなさい。

問1 a，b は実数の定数とする。方程式 $x^3+ax+b=0$ が $x=1+i$ (i は虚数単位) を解にもつとき，$a=\boxed{アイ}$，$b=\boxed{ウ}$ である。

問2 $0\leqq x\leqq\pi$ とする。$\sin x-\sqrt{3}\cos x+1=0$ を解くと，$x=\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}\pi$ である。

問3 $-1\leqq x\leqq 1$ とする。関数 $y=9^x-3^{x+1}+3$ は，$x=\boxed{カ}$ のとき最大値 $\boxed{キ}$，$x=1-\log_3\boxed{ク}$ のとき最小値 $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ をとる。

問4 直線 $2x-3y+6=0$ に関して点 $(5,\ 1)$ と対称な点の座標は，$(\boxed{サ},\ \boxed{シ})$ である。

問5 $\displaystyle\int_0^3 x|x-2|\,dx=\dfrac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$ である。

3 三角形 ABC において，AB $= 5$，CA $= 7$，$\angle$ABC $= 60^\circ$ であり，内接円を O_1 とする。また，2 辺 AB，BC および円 O_1 と接する円を O_2 とする。

問 1 BC $=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

問 2 三角形 ABC の面積は，$\boxed{\text{イウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である。

問 3 円 O_1 の半径 R を求めなさい。(解答の過程をすべて記入すること)

問 4 円 O_2 の半径 r を求めなさい。(解答の過程をすべて記入すること)

4 a，b を実数の定数とする。$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ は，2 つの条件

$$f(1) = -7,\quad f'(-1) = 0$$

を満たす。(解答の過程をすべて記入すること)

問 1 a，b の値を求めなさい。

問 2 $f(x)$ の極値と，そのときの x の値を求めなさい。

問 3 方程式 $f(x) = k$ が異なる 2 つの正の解と 1 つの負の解をもつとき，定数 k の値の範囲を求めなさい。また，このとき，最大の解 α のとりうる値の範囲を求めなさい。

解答例

$\boxed{1}$ **問 1** $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ より

$$32=2^3-3xy\cdot 2 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{xy=-4}$$

問 2 2次方程式 $x^2-(2a-1)x+a^2-2a+2=0$ が重解をもつとき，$D=0$ であるから

$$\{-(2a-1)\}^2-4\cdot 1(a^2-2a+2)=0 \quad \text{ゆえに} \quad \boldsymbol{a=\frac{7}{4}}$$

このとき，重解は

$$x=-\frac{-(2a-1)}{2\cdot 1}=a-\frac{1}{2}=\frac{7}{4}-\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{5}{4}}$$

問 3 $y=ax^2-6ax+b$ を変形すると　$y=a(x-3)^2-9a+b$

$a>0$ より，$1\leqq x\leqq 4$ において，$x=1$ で最大，$x=3$ で最小となる．

ゆえに　$-5a+b=-3$，$-9a+b=-11$

$a>0$ に注意して，これを解くと　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=7}$

問 4
$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}&=\frac{(1-\sin\theta)+(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}\\&=\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}\\&=2(1+\tan^2\theta)\\&=2\{1+(\sqrt{2})^2\}=\boldsymbol{6}\end{aligned}$$

問 5 $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\sin 120^\circ=\dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 6\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\boldsymbol{6\sqrt{3}}$

$\mathrm{AD}=x$ とおくと

$$\begin{aligned}\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}&=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\sin 60^\circ\\&=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot 4\cdot x\times\frac{\sqrt{3}}{2}\\&=\frac{3}{2}\sqrt{3}x+\sqrt{3}x=\frac{5}{2}\sqrt{3}x\end{aligned}$$

$\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}=\triangle\mathrm{ABC}$ であるから

$$\frac{5}{2}\sqrt{3}x=6\sqrt{3} \quad \text{これを解いて} \quad x=\boldsymbol{\frac{12}{5}}$$

(答) ア．$-$　イ．4　ウ．7　エ．4　オ．5　カ．4　キ．2　ク．7　ケ．6
コ．6　サ．3　シ．1　ス．2　セ．5

$\boxed{2}$ **問 1** $1+i$ がこの方程式の解であるから

$$(1+i)^3+a(1+i)+b=0$$

整理して　$(a+b-2)+(a+2)i=0$

$a+b-2$，$a+2$ は実数であるから

$$a+b-2=0,\ a+2=0$$

これを解いて　$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=4}$

問 2 方程式は　$2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+1=0$

ゆえに　$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x \leqq \pi$ より　$-\dfrac{\pi}{3} \leqq x-\dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{2}{3}\pi$

よって　$x-\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{6}$　すなわち　$\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{6}}$

問 3 $3^x=t$ とおくと，$-1 \leqq x \leqq 1$ より　$\dfrac{1}{3} \leqq t \leqq 3$　$\cdots$①

y は　$y=t^2-3t+3=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$

① において，y は

$t=3$　すなわち　$\boldsymbol{x=1}$ のとき，**最大値 3** をとり，

$t=\dfrac{3}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x=1-\log_3 2}$ のとき，**最小値 $\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$** をとる．

問 4 点 $(5,\ 1)$ を A とし，直線 $2x-3y+6=0$ を l とする．

l に関して A と対称な点を $\mathrm{B}(s,\ t)$ とおく．

l の傾きは $\dfrac{2}{3}$，直線 AB の傾きは $\dfrac{t-1}{s-5}$ である．

$l\perp\mathrm{AB}$ であるから

$$\frac{2}{3}\times\frac{t-1}{s-5}=-1 \quad すなわち \quad 3s+2t=17 \quad \cdots ①$$

線分 AB の中点 $\left(\dfrac{s+5}{2},\ \dfrac{t+1}{2}\right)$ が直線 l 上にあるから

$$2\cdot\frac{s+5}{2}-3\cdot\frac{t+1}{2}+6=0 \quad すなわち \quad 2s-3t=-19 \quad \cdots ②$$

①，② を解いて　$s=1,\ t=7$

したがって，求める点の座標は　**(1，7)**

問 5 $0\leqq x\leqq 2$ のとき　$|x-2|=-x+2$

$2\leqq x\leqq 3$ のとき　$|x-2|=x-2$

よって

$$\begin{aligned}\int_0^3 x|x-2|\,dx &= \int_0^2 x(-x+2)\,dx+\int_2^3 x(x-2)\,dx\\ &= \int_0^2 (-x^2+2x)\,dx+\int_2^3 (x^2-2x)\,dx\\ &= \left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_2^3\\ &= \frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{8}{3}}\end{aligned}$$

(答) ア．−　イ．2　ウ．4　エ．1　オ．6　カ．1　キ．3　ク．2　ケ．3　コ．4
サ．1　シ．7　ス．8　セ．3

$\boxed{\mathbf{3}}$ **問 1** 余弦定理 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$ により

$$7^2 = 5^2 + a^2 - 2{\cdot}5{\cdot}a\cos 60^\circ$$

整理して　$a^2 - 5a - 24 = 0$

ゆえに　$(a+3)(a-8) = 0$

$a > 0$ であるから　$\boldsymbol{a = 8}$

問 2 $\triangle$ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}{\cdot}5{\cdot}8\sin 60^\circ = \frac{1}{2}{\cdot}5{\cdot}8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boldsymbol{10\sqrt{3}}$$

問 3 $2s = a + b + c = 8 + 7 + 5$ より　$s = 10$

$\triangle$ABC の内接円の半径 R は，$S = Rs$ により

$$10\sqrt{3} = R{\cdot}10 \quad \text{これを解いて} \quad \boldsymbol{R = \sqrt{3}}$$

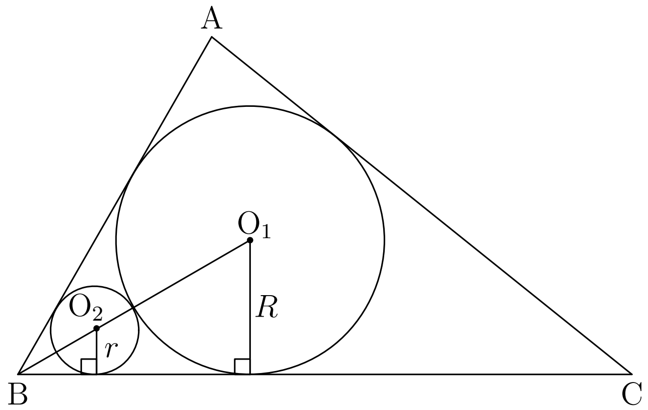
問 4 $\mathrm{O_1}$，$\mathrm{O_2}$ は，$\angle$B の二等分線上にあるから，

$$\mathrm{BO_1} = 2R,\ \mathrm{BO_2} = 2r,\ \mathrm{O_1O_2} = R + r$$

$\mathrm{BO_1} = \mathrm{BO_2} + \mathrm{O_1O_2}$ より

$$2R = 2r + (R + r) \quad \text{ゆえに} \quad r = \frac{R}{3}$$

よって，問 3 の結果から　$\boldsymbol{r = \dfrac{\sqrt{3}}{3}}$



(答) ア．8　イ．1　ウ．0　エ．3

$\boxed{4}$ **問 1** $f(x)=x^3+ax^2+bx+4$ より　$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(1)=-7$ より

$1+a+b+4=-7$　すなわち　$a+b=-12$　$\cdots$①

$f'(-1)=0$ より

$3-2a+b=0$　すなわち　$2a-b=3$　$\cdots$②

①，② を解いて　$\boldsymbol{a=-3,\ b=-9}$

問 2 問 1 の結果より　$f(x)=x^3-3x^2-9x+4$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-6x-9 \\ &= 3(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-1,\ 3$

よって，$f(x)$ の増減表は，次のようになる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	極大 9	$\searrow$	極小 -23	$\nearrow$

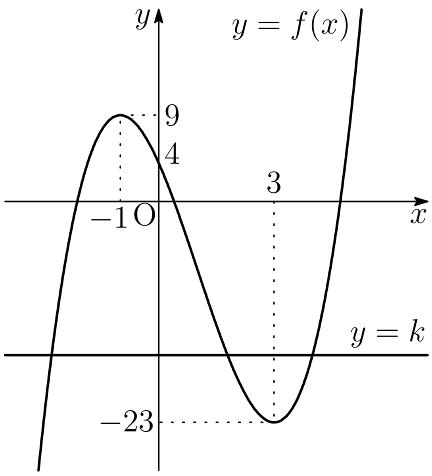
したがって，この関数は

$x=-1$ で極大値 9

$x=3$ で極小値 -23

をとる．

問 3 方程式 $f(x)=k$ の実数解は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の x 座標と一致する．



2 つの正の解と 1 つの負の解をもつのは，右のグラフから k の値の範囲は

$$\boldsymbol{-23<k<}4$$

ここで，$f(x)=4$ の解は

$$x^3-3x^2-9x+4=4$$

これを解いて　$x=0,\ \dfrac{3\pm3\sqrt{5}}{2}$

よって，最大の解 α のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{3<\alpha<\frac{3+3\sqrt{5}}{2}}$$