平成20年度　熊本保健科学大学一般前期入学試験問題
看護学科・作業療法学専攻　数学I・A(平成20年2月4日)

$\boxed{1}$ 次の各問い(**問1〜5**)に答えなさい。

問1 $x-y=2$, $xy=1$ のとき, $x^3-y^3=\boxed{アイ}$ である。

問2 放物線 $y=x^2-kx+k+1$ が x 軸から切り取る線分の長さが1のとき, $k=\boxed{ウエ}$, $\boxed{オ}$ である。

問3 放物線 $y=x^2-2ax+b$ は点 $(3,\ 4)$ を通り, 頂点が直線 $y=2x-1$ 上にある。このとき, $a=\boxed{カ}$, $b=\boxed{キ}$ である。

問4 $0° \leqq x \leqq 180°$ とする。関数 $y=\sin^2 x+\cos x+1$ は, $x=\boxed{クケ}°$ のとき, 最大値 $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ をとる。

問5 三角形ABCにおいて, AB $=5$, BC $=7$, CA $=6$ のとき, $\cos A=\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ であり, 三角形ABCの面積は $\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}$ である。

$\boxed{2}$ 次の各問い(**問1〜5**)に答えなさい。

問1 a, b は有理数とする。
$\dfrac{a}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{b\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=1+4\sqrt{3}$ のとき, $a=\boxed{ア}$, $b=\boxed{イ}$ である。

問2 $\dfrac{1}{6}, \dfrac{2}{6}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{4}{6}, \dfrac{5}{6}, \cdots, \dfrac{100}{6}$ のうち, 既約分数の個数は $\boxed{ウエ}$ 個である。

問3 6個の数字0, 1, 2, 3, 4, 5のうち, 異なる数字3個を使って3桁の整数をつくるとき, 奇数は $\boxed{オカ}$ 個できる。

問4 3個のさいころを同時に投げるとき, 3の倍数の目がちょうど2個出る確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ である。

問5 $\angle$A $=90°$ の直角三角形ABCにおいて, $\angle$A の二等分線とBCとの交点をDとする。BD $=3$, DC $=4$ のとき, AB $=\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ である。

$\boxed{\mathbf{3}}$ aを$0 \leqq a \leqq 1$を満たす定数とし，2次関数$f(x) = x^2 - (4a-2)x - 8a + 4$の$-1 \leqq x \leqq 3$における最大値を$M$，最小値を$m$とする。

問1 $y = f(x)$のグラフの頂点の座標は，$(\boxed{\text{ア}}a - \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウエ}}a^2 - \boxed{\text{オ}}a + \boxed{\text{カ}})$であり，頂点の$x$座標のとりうる値の範囲は，$\boxed{\text{キク}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ケ}}$である。

問2 M，mをそれぞれaの式で表しなさい。また，それぞれのとりうる値の範囲を求めなさい。(解答の過程をすべて記入すること)

問3 $-1 \leqq x \leqq 3$において，最小値が0以上，かつ，最大値が15以下となるとき，aのとりうる値の範囲を求めなさい。
(解答の過程をすべて記入すること)

$\boxed{\mathbf{4}}$ 大人A，B，C，Dと子供a，b，c，dの合計8人について，Aとa，Bとb，Cとc，Dとdはそれぞれ親子である。(解答の過程をすべて記入すること)

問1 8人を4人ずつ2組に分ける方法は何通りあるか求めなさい。

問2 8人が一列に並ぶとき，どの大人も隣り合わない並び方は何通りあるか求めなさい。

問3 8人が円形に並ぶとき，どの親子も向き合う並び方は何通りあるか求めなさい。

問4 8人が円形に並ぶとき，どの親子も隣り合う並び方は何通りあるか求めなさい。

解答例

$\boxed{1}$ **問 1** $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=(x-y)\{(x-y)^2+3xy\}$

$=2(2^2+3\cdot1)=\mathbf{14}$

問 2 放物線 $y=x^2-kx+k+1$ の x 軸との共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2-kx+k+1=0$ の解であり，これらの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha+\beta=k,\ \ \alpha\beta=k+1$$

このとき，$|\beta-\alpha|=1$ であるから　$(\beta-\alpha)^2=1$

ゆえに　$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=1$

したがって　$k^2-4(k+1)=1$

整理して　$k^2-4k-5=0$

$(k+1)(k-5)=0$

よって　$\boldsymbol{k=-1,\ 5}$

問 3 直線 $y=2x-1$ 上に頂点があるので，その座標を $(p,\ 2p+1)$ とし，また，放物線の方程式の x^2 の係数が 1 であるから，その方程式を

$$y=(x-p)^2+2p-1$$

とおける．これが点 $(3,\ 4)$ を通るので

$4=(3-p)^2+2p-1$

整理して　$p^2-4p+4=0$

ゆえに　$(p-2)^2=0$

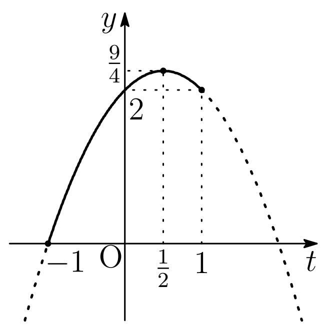
これを解いて　$p=2$

したがって　$y=(x-2)^2+2\cdot2-1$　すなわち　$y=x^2-4x+7$

係数を比較して　$-2a=-4,\ b=7$　よって　$\boldsymbol{a=2,\ b=7}$

問 4 $\sin^2x+\cos x+1=(1-\cos^2x)+\cos x+1$

$=-\cos^2x+\cos x+2$



$\cos x=t$ とおくと，$0°\leqq x\leqq 180°$ のとき

$-1\leqq t\leqq 1$ であり

$$y=-t^2+t+2$$

すなわち　$y=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

よって　$t=\dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x=60°}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$ をとる．

問 5 $a=7,\ b=6,\ c=5$ であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{12}{2\cdot 6\cdot 5}=\boldsymbol{\frac{1}{5}}$$

$\sin A>0$ であるから　　$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\boldsymbol{6\sqrt{6}}$

(答) ア．1　イ．4　ウ．$-$　エ．1　オ．5　カ．2　キ．7　ク．6　ケ．0
コ．9　サ．4　シ．1　ス．5　セ．6　ソ．6

$\boxed{\mathbf{2}}$ **問 1** 左辺を変形すると

$$\begin{aligned}\frac{a}{2-\sqrt{3}}+\frac{b\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}&=\frac{a(2+\sqrt{3})+b\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}\\&=(2a-3b)+(a+2b)\sqrt{3}\end{aligned}$$

ゆえに　$(2a-3b)+(a+2b)\sqrt{3}=1+4\sqrt{3}$
$(2a-3b-1)+(a+2b-4)\sqrt{3}=0$

$2a-3b-1,\ a+2b-4$ は有理数であるから

$$2a-3b-1=0,\quad a+2b-4=0$$

これを解いて　　$\boldsymbol{a=2,\ b=1}$

【解説】 $(2a-3b-1)+(a+2b-4)\sqrt{3}=0\cdots(*)$ において，
$a+2b-4\neq 0$ であると仮定すると，

$$\sqrt{3}=-\frac{2a-3b-1}{a+2b-4}$$

上式の左辺は無理数，右辺は有理数となり，矛盾を生じる．
ゆえに，$a+2b-4=0$ となり，$(*)$ より $2a-3b-1=0$

問 2 100 以下の自然数の集合を U とし，U の部分集合で，2 の倍数の集合を A，3 の倍数の集合を B とすると

$$A=\{2\cdot 1,\ 2\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ \cdots,\ 2\cdot 50\}$$
$$B=\{3\cdot 1,\ 3\cdot 2,\ 3\cdot 3,\ \cdots,\ 3\cdot 33\}$$
$$A\cap B=\{6\cdot 1,\ 6\cdot 2,\ 6\cdot 3,\ \cdots,\ 6\cdot 16\}$$

ゆえに　$n(A)=50,\ n(B)=33,\ n(A\cap B)=16$

よって　$\begin{aligned}n(A\cup B)&=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\\&=50+33-16=67\end{aligned}$

既約分数の個数は，分子が 2 の倍数でも 3 の倍数でない数の個数 $n(\overline{A}\cap\overline{B})$ であるから

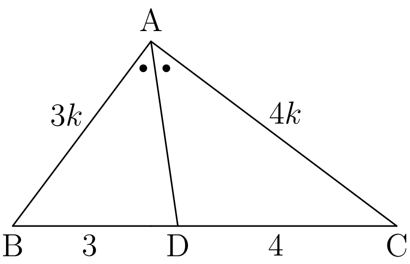
$$\begin{aligned} n(\overline{A}\cap\overline{B}) &= n(\overline{A\cup B}) \\ &= n(U)-n(A\cup B) \\ &= 100-67=\mathbf{33}\ (\text{個}) \end{aligned}$$

問 3 奇数となるのは，一の位が 1，3，5 のときで，選び方は 3 通り．
百の位には，一の位の数字と 0 を除く数字から 4 個取って並べる．
十の位には，一の位と百の位の数字を除く 4 個取って並べる．
よって，求める個数は　$3\times4\times4=\mathbf{48}$ (個)

問 4 1 個のさいころを投げるとき，3 の倍数の目が出る確率は　$\dfrac{1}{3}$
よって，3 の倍数の目がちょうど 2 個出る確率は

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)=\boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

問 5 AD は ∠A の二等分線であるから



$$\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=3:4$$

$k>0$ を用いて　$\mathrm{AB}=3k$，$\mathrm{AC}=4k$
$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ であるから

$$\mathrm{BC}=\sqrt{(3k)^2+(4k)^2}=5k$$

$5k=3+4$ であるから　$k=\dfrac{7}{5}$

よって　$\mathrm{AB}=3\times\dfrac{7}{5}=\boldsymbol{\dfrac{21}{5}}$

(答) ア．2　イ．1　ウ．3　エ．3　オ．4　カ．8　キ．2　ク．9　ケ．2
コ．1　サ．5

3 **問 1**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2-(4a-2)x-8a+4 \\ &= x^2-2(2a-1)x-8a+4 \\ &= \{x-(2a-1)\}^2-(2a-1)^2-8a+4 \\ &= \{x-(2a-1)\}^2-4a^2-4a+3 \end{aligned}$$

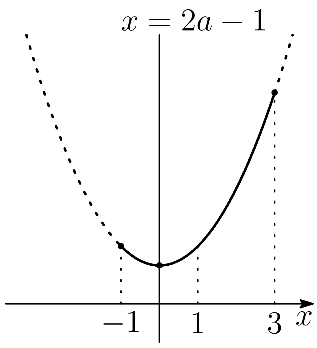
よって，頂点の座標は　$\boldsymbol{(2a-1,\,-4a^2-4a+3)}$

$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$-1\leqq 2a-1\leqq 1$

ゆえに，頂点の x 座標のとりうる値の範囲は　$\boldsymbol{-1\leqq x\leqq 1}$

問 2 問 1 の結果から，定義域 $-1 \leqq x \leqq 3$ の中央値 1 は軸 $x = 2a-1$ より右側にあるので，$x = 3$(定義域の右端) で最大値をとる．$x = 2a-1$ は定義域内の値であるから，$x = 2a-1$ で最小値をとる．ゆえに

$$M = f(3) = \boldsymbol{-20a+19}$$
$$m = f(2a-1) = \boldsymbol{-4a^2-4a+3}$$



$M = -20a+19$，$m = -4\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+4$ であるから，$0 \leqq a \leqq 1$ により

$$\boldsymbol{-1 \leqq M \leqq 19,\ -5 \leqq m \leqq 3}$$

問 3 $m \geqq 0$ より $\quad -4a^2-4a+3 \geqq 0$
したがって $\quad 4a^2+4a-3 \leqq 0$
ゆえに $\quad (2a+3)(2a-1) \leqq 0$
よって $\quad -\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2} \quad \cdots ①$

$M \leqq 15$ より $\quad -20a+19 \leqq 15$
ゆえに $\quad -20a \leqq -4$
よって $\quad a \geqq \dfrac{1}{5} \quad \cdots ②$

①，② および $0 \leqq a \leqq 1$ の共通部分を求めて $\quad \boldsymbol{\dfrac{1}{5} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}}$

(答) ア．2　イ．1　ウ．$-$　エ．4　オ．4　カ．3　キ．$-$　ク．1　ケ．1

$\boxed{4}$ **問 1** 8 人を 4 人ずつ X，Y の 2 組に分けるとする．
X 組の 4 人の選び方は $\ {}_8\mathrm{C}_4$ (通り)
その各々に対して，Y 組の 4 人は自動的に決まる．
X，Y の区別をなくすと，同じ組み分けが 2! 通りある．

よって $\quad \dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{2!} = \boldsymbol{35}$ (通り)

問 2 どの大人も隣り合わないように並ぶには

〇子〇子〇子〇子〇

という 5ヶ所の〇の位置から 4ヶ所を選んで並ぶとよい．
子供の並び方は $\ 4!$ 通り
その各々に対して，大人の並び方は $\ {}_5\mathrm{P}_4$ 通り
よって，求める並び方は $\ 4! \times {}_5\mathrm{P}_4 = 24 \times 120 = \boldsymbol{2880}$ (通り)

問 3 大人 A を固定すると，大人の位置を決めると子供の位置は決まるから，B, C，D の並び方を求めればよい．

B の位置は A，a の位置を除く 6 通り，C の位置は A，a，B，b の位置をを除く 4 通り，D の位置は A，a，B，b，C，c の位置を除く 2 通りである．

よって，求める並び方は　$6 \times 4 \times 2 = \mathbf{48}$ (通り)

問 4 各親子をひとまとめにすると，4 つの円順列は　$3!$ 通り

この各々に対して，親子の並び方は　2^4 通り

よって，求める並び方は　$3! \times 2^4 = \mathbf{96}$ (通り)