平成 20 年度　熊本保健科学大学一般前期入学試験問題
衛生技術学科・理学療法学専攻　数学 I・II(平成 20 年 2 月 4 日)

$\boxed{1}$ 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 $x - y = 2$, $xy = 1$ のとき, $x^3 - y^3 = \boxed{\text{アイ}}$ である。

問 2 放物線 $y = x^2 - kx + k + 1$ が x 軸から切り取る線分の長さが 1 のとき, $k = \boxed{\text{ウエ}}$, $\boxed{\text{オ}}$ である。

問 3 放物線 $y = x^2 - 2ax + b$ は点 $(3,\ 4)$ を通り, 頂点が直線 $y = 2x - 1$ 上にある。このとき, $a = \boxed{\text{カ}}$, $b = \boxed{\text{キ}}$ である。

問 4 $0^\circ \leqq x \leqq 180^\circ$ とする。関数 $y = \sin^2 x + \cos x + 1$ は, $x = \boxed{\text{クケ}}^\circ$ のとき, 最大値 $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ をとる。

問 5 三角形 ABC において, AB $= 5$, BC $= 7$, CA $= 6$ のとき, $\cos A = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり, 三角形 ABC の面積は $\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}$ である。

$\boxed{2}$ 次の各問い (**問 1〜5**) に答えなさい。

問 1 $P(x) = x^{99} + ax + 1$ (a は定数) とする。$P(x)$ を $x - 1$ で割ったときの余りが 5 のとき, $a = \boxed{\text{ア}}$ である。このとき, $P(x)$ を $x + 1$ で割ったときの余りは, $\boxed{\text{イウ}}$ である。

問 2 $\pi \leqq x \leqq 2\pi$ とする。方程式 $\cos 2x - 3\cos x - 1 = 0$ を解くと, $x = \dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi$ である。

問 3 不等式 $(\log_3 x)^2 - 4\log_9 3x - 6 < 0$ を解くと, $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} < x < \boxed{\text{クケ}}$ である。

問 4 曲線 $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ の接線が直線 $y = 6x + 1$ と平行になるとき, 接点の x 座標は, $x = \boxed{\text{コサ}}$, $\boxed{\text{シ}}$ である。

問 5 2 つの放物線 $y = x^2 - 5x + 4$, $y = -x^2 + 3x - 2$ で囲まれた部分の面積は, $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

3 a を $0 \leqq a \leqq 1$ を満たす定数とし，2 次関数 $f(x) = x^2 - (4a-2)x - 8a + 4$ の $-1 \leqq x \leqq 3$ における最大値を M，最小値を m とする。

問 1 $y = f(x)$ のグラフの頂点の座標は，$(\boxed{\text{ア}}\,a - \boxed{\text{イ}},\ \boxed{\text{ウエ}}\,a^2 - \boxed{\text{オ}}\,a + \boxed{\text{カ}})$ であり，頂点の x 座標のとりうる値の範囲は，$\boxed{\text{キク}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ケ}}$ である。

問 2 M，m をそれぞれ a の式で表しなさい。また，それぞれのとりうる値の範囲を求めなさい。(解答の過程をすべて記入すること)

問 3 $-1 \leqq x \leqq 3$ において，最小値が 0 以上，かつ，最大値が 15 以下となるとき，a のとりうる値の範囲を求めなさい。
(解答の過程をすべて記入すること)

4 円 $C : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 5 = 0$ と直線 $l : 2x - y + k = 0$ について，次の問いに答えなさい。(解答の過程をすべて記入すること)

問 1 円 C の中心の座標と半径 r を求めなさい。

問 2 円 C と直線 l が接するときの k の値と，そのときの接点の座標を求めなさい。

問 3 円 C と直線 l が異なる 2 点 P，Q で交わり，$\mathrm{PQ} = 2$ のとき，k の値を求めなさい。

解答例

$\boxed{1}$ **問 1** $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$

$= (x-y)\{(x-y)^2+3xy\}$

$= 2(2^2+3\cdot1) = \mathbf{14}$

問 2 放物線 $y = x^2 - kx + k + 1$ の x 軸との共有点の x 座標は，2 次方程式 $x^2 - kx + k + 1 = 0$ の解であり，これらの解を α，β とすると，解と係数の関係により

$$\alpha + \beta = k,\quad \alpha\beta = k+1$$

このとき，$|\beta - \alpha| = 1$ であるから　$(\beta-\alpha)^2 = 1$

ゆえに　$(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = 1$

したがって　$k^2 - 4(k+1) = 1$

整理して　$k^2 - 4k - 5 = 0$

$(k+1)(k-5) = 0$

よって　$\boldsymbol{k = -1,\ 5}$

問 3 直線 $y = 2x-1$ 上に頂点があるので，その座標を $(p,\ 2p+1)$ とし，また，放物線の方程式の x^2 の係数が 1 であるから，その方程式を

$$y = (x-p)^2 + 2p - 1$$

とおける．これが点 $(3,\ 4)$ を通るので

$4 = (3-p)^2 + 2p - 1$

整理して　$p^2 - 4p + 4 = 0$

ゆえに　$(p-2)^2 = 0$

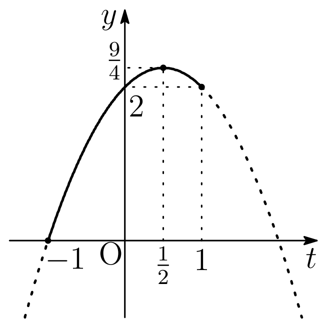
これを解いて　$p = 2$

したがって　$y = (x-2)^2 + 2\cdot2 - 1$　すなわち　$y = x^2 - 4x + 7$

係数を比較して　$-2a = -4,\ b = 7$　よって　$\boldsymbol{a = 2,\ b = 7}$

問 4 $\sin^2 x + \cos x + 1 = (1-\cos^2 x) + \cos x + 1$

$= -\cos^2 x + \cos x + 2$



$\cos x = t$ とおくと，$0° \leqq x \leqq 180°$ のとき $-1 \leqq t \leqq 1$ であり

$y = -t^2 + t + 2$

すなわち　$y = -\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4}$

よって　$t = \dfrac{1}{2}$　すなわち　$\boldsymbol{x = 60°}$ のとき，最大値 $\boldsymbol{\dfrac{9}{4}}$ をとる．

問 5 $a=7$, $b=6$, $c=5$ であるから，余弦定理により

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6^2+5^2-7^2}{2\cdot 6\cdot 5}=\frac{12}{2\cdot 6\cdot 5}=\mathbf{\frac{1}{5}}$$

$\sin A>0$ であるから　　$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

よって　　$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5}=\boldsymbol{6\sqrt{6}}$

(答) ア．1　イ．4　ウ．−　エ．1　オ．5　カ．2　キ．7　ク．6　ケ．0
コ．9　サ．4　シ．1　ス．5　セ．6　ソ．6

$\boxed{2}$ **問 1** $P(x)$ を $x-1$ で割った余りは $P(1)$ であるから，$P(1)=5$ より

$1^{99}+a\cdot 1+1=5$　これを解いて　$\boldsymbol{a=3}$

$P(x)$ を $x+1$ で割った余りは

$$P(-1)=(-1)^{99}+3\cdot(-1)+1=\mathbf{-3}$$

問 2 左辺を変形すると　$(2\cos^2 x-1)-3\cos x-1=0$
整理して　$2\cos^2 x-3\cos x-2=0$
ゆえに　$(\cos x-2)(2\cos x+1)=0$
$\cos x-2\neq 0$ であるから　$\cos x=-\frac{1}{2}$
$\pi\leqq x\leqq 2\pi$ より　　$\boldsymbol{x=\frac{4}{3}\pi}$

問 3 $(\log_3 x)^2-4\log_9 3x-6<0$ の左辺を変形すると

$$(\log_3 x)^2-4\cdot\frac{\log_3 3x}{\log_3 9}-6<0$$

ゆえに　$(\log_3 x)^2-4\cdot\frac{\log_3 3+\log_3 x}{2}-6<0$
整理して　$(\log_3 x)^2-2\log_3 x-8<0$

$$(\log_3 x+2)(\log_3 x-4)<0$$
$$-2<\log_3 x<4$$
$$\log_3 3^{-2}<\log_3 x<\log_3 3^4$$

底 3 は 1 より大きいから　　$\boldsymbol{\frac{1}{9}<x<81}$

問 4 $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 1$ を微分すると　$y' = 3x^2 - 6x - 3$

接線の傾きが 6 であるときの x 座標であるから

$$3x^2 - 6x - 3 = 6$$

整理して　$x^2 - 2x - 3 = 0$

ゆえに　$(x+1)(x-3) = 0$

よって　$\boldsymbol{x = -1,\ 3}$

問 5 方程式 $x^2 - 5x + 4 = -x^2 + 3x - 2$ を解くと　$x = 1,\ 3$

放物線 $y = x^2 - 5x + 4$ は下に凸，放物線 $y = -x^2 + 3x - 2$ は上に凸であるから，この 2 つの放物線で囲まれた部分の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_1^3 \{(-x^2 + 3x - 2) - (x^2 - 5x + 4)\}dx \\ &= -2\int_1^3 (x-1)(x-3)\,dx \\ &= -2\left(-\frac{1}{6}\right)(3-1)^3 = \boldsymbol{\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

(答) ア．3　イ．−　ウ．3　エ．4　オ．3　カ．1　キ．9　ク．8　ケ．1

コ．−　サ．1　シ．3　ス．8　セ．3

$\boxed{\textbf{3}}$ **問 1**
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (4a-2)x - 8a + 4 \\ &= x^2 - 2(2a-1)x - 8a + 4 \\ &= \{x - (2a-1)\}^2 - (2a-1)^2 - 8a + 4 \\ &= \{x - (2a-1)\}^2 - 4a^2 - 4a + 3 \end{aligned}$$

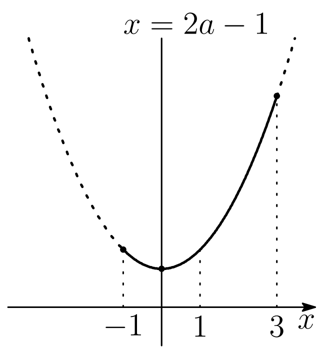
よって，頂点の座標は　$\boldsymbol{(2a-1, -4a^2 - 4a + 3)}$

$0 \leqq a \leqq 1$ のとき　$-1 \leqq 2a - 1 \leqq 1$

ゆえに，頂点の x 座標のとりうる値の範囲は　$\boldsymbol{-1 \leqq x \leqq 1}$

問 2 問 1 の結果から，定義域 $-1 \leqq x \leqq 3$ の中央値 1 は軸 $x = 2a - 1$ より右側にあるので，$x = 3$(定義域の右端) で最大値をとる．$x = 2a - 1$ は定義域内の値であるから，$x = 2a - 1$ で最小値をとる．ゆえに

$$M = f(3) = \boldsymbol{-20a + 19}$$
$$m = f(2a-1) = \boldsymbol{-4a^2 - 4a + 3}$$



$M = -20a + 19$，$m = -4\left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + 4$ であるから，$0 \leqq a \leqq 1$ により

$$\boldsymbol{-1 \leqq M \leqq 19,\ \ -5 \leqq m \leqq 3}$$

問 3 $m \geqq 0$ より $\quad -4a^2-4a+3 \geqq 0$

したがって $\quad 4a^2+4a-3 \leqq 0$

ゆえに $\quad (2a+3)(2a-1) \leqq 0$

よって $\quad -\dfrac{3}{2} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2} \quad \cdots①$

$M \leqq 15$ より $\quad -20a+19 \leqq 15$

ゆえに $\quad -20a \leqq -4$

よって $\quad a \geqq \dfrac{1}{5} \quad \cdots②$

①，② および $0 \leqq a \leqq 1$ の共通部分を求めて $\boldsymbol{\dfrac{1}{5} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}}$

(答) ア．2　イ．1　ウ．−　エ．4　オ．4　カ．3　キ．−　ク．1　ケ．1

$\boxed{4}$ **問 1** 方程式 $x^2+y^2-2x-6y+5=0$ を変形すると

$$(x^2-2x+1)+(y^2-6y+9)=-5+1+9$$

すなわち $\quad (x-1)^2+(y-3)^2=5$

よって，中心が点 **(1，3)** で，半径 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ の円である．

問 2 $x^2+y^2-2x-6y+5=0 \cdots①$，$y=2x+k \cdots②$ とおいて，
2 式から y を消去して整理すると

$$5x^2+2(2k-7)x+k^2-6k+5=0 \quad \cdots③$$

判別式は $\quad D/4=(2k-7)^2-5(k^2-6k+5)=-(k+4)(k-6)$

円と直線が接するのは，$D=0$ のときである．

よって，$(k+4)(k-6)=0$ を解いて $\quad k=-4,\ 6$

このとき，③ の重解は $\quad x=-\dfrac{2(2k-7)}{2\cdot5}=-\dfrac{2k-7}{5} \quad \cdots④$

④，② により，$\boldsymbol{k=-4}$ **のとき，接点 (3，2)**

$\boldsymbol{k=6}$ **のとき，接点 (−1，4)**

問 3 円の中心 C(1, 3) から直線 l に垂線 CH を引くと，PQ $=2$ より PH $=1$ であるから

$$\mathrm{CH}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-1^2}=2$$

このとき，点 C と直線 $l: 2x-y+k=0$ の距離が 2 であるから

$$\frac{|2\cdot1-3+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2$$

ゆえに $\quad |k-1|=2\sqrt{5}$

よって $\quad \boldsymbol{k=1\pm2\sqrt{5}}$