平成19年度　熊本保健科学大学一般前期入学試験問題
看護学科・作業療法学専攻　数学I・A(平成19年2月4日)

$\boxed{1}$ 次の各問い (**問1〜5**) に答えなさい。

問1 2次関数のグラフが，3点 $(4,-1)$，$(2,\ 1)$，$(-2,-1)$ を通るとき，この2次関数を求めなさい。

問2 2次方程式 $x^2+4kx+k-2=0$ が -2 より小さい解と 0 より大きい解をもつような定数 k の値の範囲を求めなさい。

問3 不等式 $|\,x-1\,|+|\,x-3\,| \leqq 4$ を解きなさい。

問4 $\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=\mathrm{b}$，$\mathrm{AB}=c$ である三角形ABCがある。関係式 $a\cos B - b\cos A = c$ を満たすとき，三角形ABCはどのような三角形であるか答えなさい。

問5 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$2\sin^2\theta - \cos\theta = 2$ を満たす θ の値を求めなさい。

$\boxed{2}$ 次の各問い (**問1〜5**) に答えなさい。

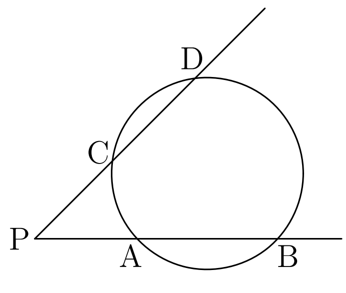
問1 1から100までの番号が1つずつ書かれたカードが100枚ある。この中から1枚のカードを取り出すとき，カードに書かれている番号が4または6で割り切れるような数である確率を求めなさい。

問2 不等式 $2x+3 \leqq \sqrt{3}(x+4)$ を解きなさい。

問3 実数 x において，$x^2-x-12 \leqq 0$ を満たすことが $|\,x\,| \leqq a$ を満たすための十分条件となるような正の定数 a の値の範囲を求めなさい。

問4 $(x^2-2x)^{10}$ を展開したとき，x^{17} の係数を求めなさい。

問5 右の図のように，円と2本の直線がある。
$\mathrm{AB}=6$，$\mathrm{PC}=5$，$\mathrm{CD}=4$ であるとき，
線分PAの長さを求めなさい。



$\boxed{3}$ AB $=3$，AC $=5$，$\angle$BAC $=120^\circ$ である三角形 ABC がある。$\angle$BAC の二等分線上に，BD $=7$ となる点 D を辺 BC に関して点 A と反対側にとる。線分 AD と辺 BC の交点を E とする。このとき，次の各問い (**問 1〜4**) に答えなさい。

問 1 BC の長さを求めなさい。

問 2 AD の長さを求めなさい。

問 3 AE の長さを求めなさい。

問 4 三角形 ABE の面積は四角形 ABDC の面積の何倍であるかを求めなさい。

$\boxed{4}$ 2 次関数 $f(x)=x^2-6x+2$ がある。このとき，次の各問い (**問 1〜3**) に答えなさい。

問 1 $0 \leqq x \leqq 5$ における関数 $f(x)$ の最大値と最小値を求めなさい。

問 2 a を正の定数とする。$-a \leqq x \leqq a$ における関数 $f(x)$ の最大値を求めなさい。

問 3 a を正の定数とする。$0 \leqq x \leqq a$ における関数 $f(x)$ の最小値を求めなさい。

解答例

$\boxed{1}$ **問 1** 求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする．

グラフが 3 点 $(4,-1)$，$(2,\ 1)$，$(-2,-1)$ を通るから

$$-1=16a+4b+c \qquad \cdots ①$$

$$1=4a+2b+c \qquad \cdots ②$$

$$-1=4a-2b+c \qquad \cdots ③$$

① − ② から　$12a+2b=-2$

すなわち　$6a+b=-1 \qquad \cdots ④$

② − ③ から　$4b=2 \qquad \cdots ⑤$

④，⑤ を解くと　$a=-\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{1}{2}$

これらを ② に代入して　$c=1$

よって，求める 2 次関数は　$\boldsymbol{y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}x+1}$

問 2 $f(x)=x^2+4kx+k-2$ とおく.

2 次方程式 $f(x)=0$ が -2 より小さい解と 0 より大きい解をもつ条件は,
$x<-2$ と $0<x$ の範囲で放物線 $y=f(x)$ が x 軸と交わることであるから

$$\begin{cases} f(-2)=(-2)^2+4k\cdot(-2)+k-2<0 \\ f(0)=k-2<0 \end{cases}$$

第 1 式から　$k>\dfrac{2}{7}$,　第 2 式から　$k<2$

求める k の値の範囲は，上の 2 式の共通範囲で　$\boldsymbol{\dfrac{2}{7}<k<2}$

問 3 ［1］ $x<1$ のとき，$|x-1|=-x+1$，$|x-3|=-x+3$ であるから
不等式は　$(-x+1)+(-x+3)\leqq 4$
これを解いて　$x\geqq 0$
このときの解は　$0\leqq x<1$

［2］ $1\leqq x<3$ のとき，$|x-1|=x-1$，$|x-3|=-x+3$ であるから
不等式は　$(x-1)+(-x+3)\leqq 4$
左辺は 2 であるから，この不等式を満たす.
このときの解は　$1\leqq x<3$

［3］ $3\leqq x$ のとき，$|x-1|=x-1$，$|x-3|=x-3$ であるから
不等式は　$(x-1)+(x-3)\leqq 4$
これを解いて　$x\leqq 4$
このときの解は　$3\leqq x\leqq 4$

したがって，求める解は　$\boldsymbol{0\leqq x\leqq 4}$

問 4 余弦定理により，等式は　$a\cdot\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}-b\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=c$

この両辺に $2c$ をかけて

$$(c^2+a^2-b^2)-(b^2+c^2-a^2)=2c^2$$

すなわち　$a^2=b^2+c^2$

よって　**$\boldsymbol{A=90^\circ}$ の直角三角形**

問 5 左辺を変形すると　$2(1-\cos^2\theta)-\cos\theta=2$

整理すると　$\cos\theta(2\cos\theta+1)=0$

$0^\circ\leqq 180^\circ$ のとき

$\cos\theta=0$ から　$\theta=90^\circ$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$ から　$\theta=120^\circ$

したがって　$\boldsymbol{\theta=90^\circ,\ 120^\circ}$

$\boxed{2}$ **問 1** 1 から 100 までの番号で，4 で割り切れる数の集合を A，6 で割り切れる数の集合を B とすると

$$A = \{4{\cdot}1,\ 4{\cdot}2,\ 4{\cdot}3,\ \cdots,\ 4{\cdot}25\}$$
$$B = \{6{\cdot}1,\ 6{\cdot}2,\ 6{\cdot}3,\ \cdots,\ 6{\cdot}16\}$$
$$A \cap B = \{12{\cdot}1,\ 12{\cdot}2,\ 12{\cdot}3,\ \cdots,\ 12{\cdot}8\}$$

よって，番号が 4 または 6 で割り切れる数である確率は

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{25}{100} + \frac{16}{100} - \frac{8}{100} = \boldsymbol{\frac{33}{100}}$$

問 2 不等式は　$2x + 3 \leqq \sqrt{3}x + 4\sqrt{3}$

移項すると　$(2 - \sqrt{3})x \leqq 4\sqrt{3} - 3$

両辺を $(2 - \sqrt{3})$ で割ると　$x \leqq \dfrac{4\sqrt{3} - 3}{2 - \sqrt{3}}$

よって　$\boldsymbol{x \leqq 6 + 5\sqrt{3}}$

問 3 $x^2 - x - 12 \leqq 0$ を解いて　$-3 \leqq x \leqq 4$　$\cdots$①

$|x| \leqq a$ を解いて　$-a \leqq x \leqq a$　$\cdots$②

① は ② であるための十分条件であるから

$$-3 \leqq x \leqq 4 \quad \Longrightarrow \quad -a \leqq x \leqq a$$

ゆえに　$-a \leqq -3$　かつ　$4 \leqq a$

よって　$\boldsymbol{a \geqq 4}$

問 4 $(x^2 - 2x)^{10}$ の展開式の一般項は

$${}_{10}\mathrm{C}_r(x^2)^{10-r}(-2x)^r = {}_{10}\mathrm{C}_r(-2)^r x^{20-r}$$

$20 - r = 17$ とすると　$r = 3$

よって，求める係数は　${}_{10}\mathrm{C}_3(-2)^3 = 120{\cdot}(-8) = \boldsymbol{-960}$

問 5 $\mathrm{PA} = x$ とおく．方べきの定理により　$\mathrm{PA}{\cdot}\mathrm{PB} = \mathrm{PC}{\cdot}\mathrm{PD}$

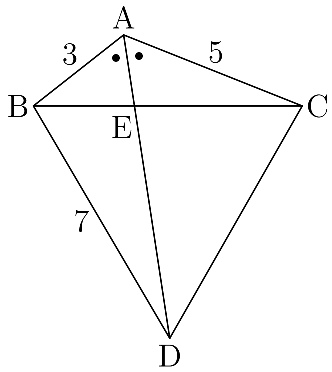
ゆえに　$x(x + 6) = 5{\cdot}9$

整理して　$x^2 + 6x - 45 = 0$

よって　$x = -3 \pm 3\sqrt{6}$

$x > 0$ であるから　$x = \boldsymbol{-3 + 3\sqrt{6}}$

3 **問 1** △ABC に余弦定理を適用すると



$$\begin{aligned}\mathrm{BC}^2 &= \mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 - 2\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\cos A\\ &= 3^2 + 5^2 - 2\cdot3\cdot5\cos 120^\circ\\ &= 9 + 25 - 2\cdot3\cdot5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\ &= 49\end{aligned}$$

$\mathrm{BC} > 0$ であるから　$\mathbf{BC = 7}$

問 2 $\mathrm{AD} = x$ とおく．△ABD に余弦定理を適用すると

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2\cdot3\cdot x\cos 60^\circ$$

ゆえに　$49 = 9 + x^2 - 2\cdot3\cdot x\cdot\dfrac{1}{2}$

整理して　$x^2 - 3x - 40 = 0$

$$(x+5)(x-8) = 0$$

$x > 0$ であるから　$x = \mathbf{8}$

問 3 $\mathrm{AE} = y$ とおく．△ABE + △AEC = △ABC であるから

$$\frac{1}{2}\cdot3y\sin 60^\circ + \frac{1}{2}\cdot5y\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin 120^\circ$$

$$3y + 5y = 15$$

$$y = \mathbf{\frac{15}{8}}$$

問 4 $\triangle\mathrm{ABE} = \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot\dfrac{15}{8}\sin 60^\circ = \dfrac{45}{16}\sin 60^\circ$

$\triangle\mathrm{ABD} = \dfrac{1}{2}\cdot3\cdot8\sin 60^\circ = 12\sin 60^\circ$

$\triangle\mathrm{ADC} = \dfrac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin 60^\circ = 20\sin 60^\circ$

したがって，求める面積比は

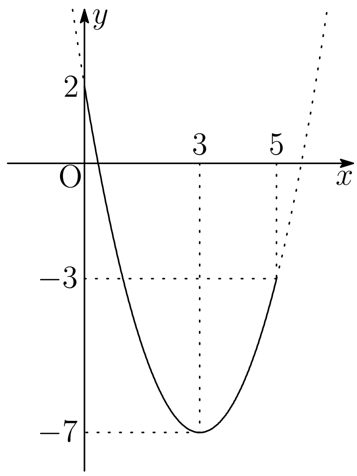
$$\frac{\frac{45}{16}\sin 60^\circ}{12\sin 60^\circ + 20\sin 60^\circ} = \mathbf{\frac{45}{512}}$$

$\boxed{4}$ **問 1** $x^2 - 6x + 2 = (x-3)^2 - 7$ であるから

$$f(x) = (x-3)^2 - 7$$

$0 \leqq x \leqq 5$ での $y = f(x)$ のグラフは，
右の図の実線部分である．
よって，$f(x)$ は

$x = 0$ で**最大値 2** をとり，
$x = 3$ で**最小値 -7** をとる．



問 2 a は正の定数であるから　$f(-a) > f(a)$
グラフは下に凸の放物線であるから

$x = -a$ で**最大値 $a^2 + 6a + 2$** をとる．

問 3 [1] $0 < a \leqq 3$ のとき，$0 \leqq x \leqq a$ の範囲で y の値は減少する．
よって，$x = a$ で最小値 $a^2 - 6a + 2$ をとる．

[2] $3 < a$ のとき，$0 \leqq x \leqq a$ の範囲に放物線の頂点を含むので，
$x = 3$ で最小値 -7 をとる．

よって，**$0 < a \leqq 3$ のとき最小値 $a^2 - 6a + 2$，$3 < a$ のとき最小値 -7**